

$\mathbb{Z}_n$

1. Czy w grupie cyklicznej $(\mathbb{Z}_n, +)$ każdy element jest generatorem tzn. elementem, który dodawany do siebie da wszystkie elementy rozważanego zbioru?
2. Dla grup $\mathbb{Z}_m$ zdefiniujemy $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ jako zbiór par (a, b) , w których działanie dodawania określamy wzorem $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
Rozpisz tabelkę działań dla $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ i sprawdź, że pierwsza z nich nie jest cykliczna (czyli taka jak jakiś $\mathbb{Z}_k$ z dodawaniem), a druga jest.
Czy możesz zaryzykować hipotezę, kiedy $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ jest cykliczna?
3. Sprawdź, że zbiory $\{1, 2, 3, 4\}$ z mnożeniem modulo 5 i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ z mnożeniem modulo 7 są grupami cyklicznymi. Innymi słowy, znajdź generator.
Czy możesz zaryzykować hipotezę, kiedy $\{1, 2, \dots, n-1\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą cykliczną?

Symetrie

4. Rozważmy następujący zbiór symetrii sześciokąta: odbicie względem poziomej osi symetrii, odbicie względem pionowej osi symetrii, identyczność. Czy jest on zamknięty na składanie?
5. Znajdź zbiór symetrii liter: Z, V, H .
6. Ilu elementów potrzeba do wygenerowania grupy D_n ?

Permutacje

7. Trening składania permutacji.

(a) Dane są permutacje

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 5 & 1 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ oraz } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Oblicz: $\pi_1\pi_2$, $\pi_2\pi_1$, $\pi_1^{-1}\pi_2$, $(\pi_1\pi_2)^{-1}$, $\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}$.

(b) Zapisz w postaci dwuwierszowej:

$$\pi_3 = (1, 2)(3, 4, 5)(1, 2, 3)(5, 1, 2) \quad \text{ i } \quad \pi_4 = (3, 1, 4, 5)(1, 2, 3, 4)(3, 1, 4, 2)(1, 2, 3).$$

(c) Rozłóż na cykle rozłączne permutacje z powyższych punktów.

8. Znajdź zbiór permutacji, na którym składanie działa tak samo jak działanie w: $\mathbb{Z}_n$, D_3 , D_4 .
9. Rozważmy wielomian $p = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2$. Ten wielomian nie zmienia się, jeśli zamienimy miejscami x_1 i x_2 albo x_3 i x_4 . Takie zamiany nazywamy symetriami wielomianu.
Znajdź wszystkie symetrie powyższego wielomianu i zapisz je jako permutacje. To samo dla $x_1x_2 + x_2x_3$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.
10. Czy możemy opisać grupę obrotów czworościanu foremego przy użyciu permutacji? Sześciianu?

Grupy

11. Czy są grupami:

(a) $\mathbb{Z}$ z odejmowaniem?

(b) $\mathbb{Z}$ z maksimum lub minimum, tzn. z działaniami

$$m \vee n = \begin{cases} m, & \text{gdy } m \geq n \\ n, & \text{gdy } m < n \end{cases} \quad \text{lub} \quad m \wedge n = \begin{cases} m, & \text{gdy } m \leq n \\ n, & \text{gdy } m > n \end{cases} ?$$

(c) $\mathbb{Z}$ z mnożeniem?

(d) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ z działaniem $x * y = x + y + xy$?

(e) $(-1, 1)$ z działaniem $x * y = \frac{x+y}{xy+1}$?

(f) rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ z działaniem różnicy symetrycznej:
 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

12. Dla każdego z elementów g grup $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, D_4, S_3$ znajdź n takie, że $g^n = e$, gdzie e jest elementem neutralnym. Następnie, uzasadnij, że w grupie skończonej dla każdego elementu zawsze istnieje takie n .

13. Uzasadnij, że jeśli grupa ma p elementów, gdzie p jest liczbą pierwszą, to musi być cykliczna.

14. Uzasadnij, że jeśli dla każdego g mamy $g^2 = e$, to działanie w grupie jest przemienne.

15. Czy każdą grupę można zrealizować jako pewną grupę permutacji?