



ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA

W TO MI ZNOWU GRAJ¹

23 MAJA 2026

1. GRY POWTARZALNE

1.1. Przypomnienie gier dynamicznych i strategicznych. *Strategią* gracza i nazywamy przepis, jaką konkretną decyzję powinien ten gracz podejmować w każdym możliwym fragmencie gry.

Równowagą Nasha nazywamy taki wektor strategii $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ (gdzie s_i to pewna strategia gracza i), że jeśli każdy z graczy i gra strategię s_i , to żaden z graczy j nie zyskałby, gdyby zmienił swoją strategię s_j na dowolną inną.

Dylemat więźnia.

Dwóch podejrzanych zostało zatrzymanych przez policję. Policja, nie mając wystarczających dowodów do postawienia zarzutów, rozdziela więźniów i przedstawia każdemu z nich tę samą ofertę: jeśli będzie zeznawać przeciwko drugiemu, a drugi będzie milczeć, to zeznający wyjdzie na wolność, a milczący dostanie dziesięcioletni wyrok. Jeśli obaj będą milczeć, obaj odsiedzą 1 rok za inne przewinienia. Jeśli obaj będą zeznawać, obaj dostaną 6-letnie wyroki. Każdy z nich musi podjąć decyzję niezależnie i żaden nie dowie się, czy drugi milczy czy zeznaje, aż do momentu wydania wyroku.²

Ustalmy, że:

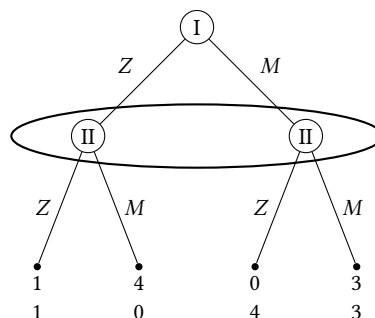
- wyjście na wolność jest dla każdego z więźniów oceniane jako 4 punkty użyteczności;
- roczny wyrok jako 3 punktów użyteczności;
- 6-letni wyrok jest oceniany jako 1 punkt użyteczności;
- 10-letni wyrok jest oceniany jako 1 punkt użyteczności.

Poniżej przedstawiono tabelę tej gry, gdzie strategie oznaczono następująco:

- Z – zeznawać;
- M – milczeć.

		Więzień II	
		Z	M
Więzień I	Z	1, 1	4, 0
	M	0, 4	3, 3

Grę w postaci ekstensywnej można przedstawić następująco za pomocą drzewka.



¹Zadania zostały opracowane na bazie książki *Game Theory – Michael Maschler, Eilon Solan, Shmuel Zamir (2013)*.

²Opis na bazie [Wikipedii](#).

Elipsa³ otaczająca dwa węzły gracza II oznacza, że gracz II w momencie decyzji nie wie, w którym z tych węzłów się znajduje (to znaczy, nie wie, co wybrał gracz I). Może jedynie zdecydować między akcją Z a M.

1.2. Nazewnictwo. Gry powtarzane są grami, gdzie Ci sami gracze grają wiele razy w tę samą grę strategiczną. Przez T będziemy oznaczali liczbę takich rozegranych gier. Każdą pojedynczą grę będziemy nazywali *etapem*. W przeciwieństwie do gier strategicznych, decyzję każdego z graczy będziemy nazywali *akcją*, natomiast *strategią* będziemy nazywali plan na całą grę T -etapową.

Oznaczmy przez $u_i^1, u_i^2, u_i^3, \dots$ użyteczność/wypłatę gracza i uzyskaną na 1. etapie, 2. etapie, 3. etapie itd. Zakłada się, że każdy z graczy stara się zmaksymalizować swoją *średnią użyteczność*:

$$\gamma_i = \frac{u_i^1 + u_i^2 + u_i^3 + \dots + u_i^T}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i^t$$

to znaczy średnią arytmetyczną z użyteczności ze wszystkich etapów. Równoważnie można powiedzieć, że każdy z graczy maksymalizuje sumę użyteczności ze wszystkich etapów.

Jeśli liczba etapów jest nieskończona, zakładamy, że każdy z graczy maksymalizuje:

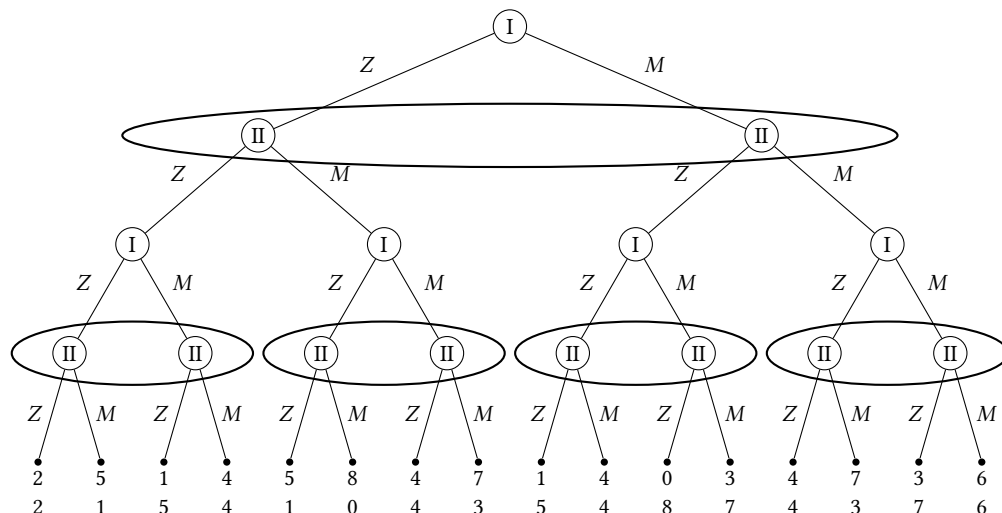
$$\gamma_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u_i^1 + u_i^2 + u_i^3 + \dots + u_i^T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i^t.$$

O takiej grze mówimy, że jest *nieskończoną grą powtarzalną*.

Wektorem wypłat w grze 2-osobowej nazywamy (γ_1, γ_2) .

1.3. Zadania.

1. (Dwukrotny dylemat więźnia). Rozważmy dwuetapowy dylemat więźnia. Poniżej przedstawiono drzewko takiego dwuetapowego dylematu więźnia z sumą użyteczności dla każdego z graczy.



Akcję w drugim etapie będziemy oznaczać następująco $A \rightarrow B$, co oznacza, że jak przeciwnik zagrał A poprzednio, to my gramy B . Przykładowo strategię „najpierw milcz, jak przeciwnik milczy, to milcz, jak zeznaje, to też zeznawaj” zapiszemy następująco: $(M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$. Natomiast strategię „zawsze zeznawaj” zapiszemy tak: $(Z; Z \rightarrow Z, M \rightarrow Z)$ lub prościej $(Z; Z)$.

³Nazywamy ją *zbiorem informacyjnym* Gracza II. Używając tego pojęcia można modelować gry z niepełną informacją.

- Policz sumaryczną użyteczność każdego z graczy, jeśli Gracz I gra strategię $s_I = (M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (początkowe zaufanie), a Gracz II gra $s_{II} = (Z; Z)$ (niewspółpracujący). Kto wychodzi lepiej w takiej sytuacji?
 - To samo, jeśli $s_I = (M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (początkowe zaufanie) oraz $s_{II} = (M; M)$ (współpracujący).
 - To samo, jeśli $s_I = (M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (początkowe zaufanie) oraz $s_{II} = (M; Z)$ (zdradzający).
 - Ile wszystkich możliwych strategii ma każdy z graczy?
 - Przygotuj tabelę dla całej gry dwuetapowej (jeszcze nie wypełniaj wnętrza użytecznościami).
 - Wypełnij wiersz odpowiadający strategii Gracza I $s_I = (M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (początkowa nieufność). Jaką najlepszą odpowiedź $no_{II}(M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (lub odpowiedzi) ma na tę strategię Gracz II (tzn. jaka strategia jest dla niego najlepsza, jeśli wie, że Gracz I gra s_I)?
 - Zrób to samo, gdy $s_I = (M; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$ (początkowe zaufanie).
 - Czy (s_I, s_{II}) , gdy $s_I = s_{II} = (Z; Z \rightarrow Z, M \rightarrow M)$, jest równowagą Nasha?
 - Czy $((Z, Z), (Z, Z))$ jest równowagą Nasha?
2. (Dwukrotny dylemat więźnia z możliwością karania). Rozważmy następującą grę graną dwukrotnie ($T = 2$). Jest to dylemat więźnia z dodatkową możliwą akcją K polegającą na ukaraniu przeciwnika.

		Gracz II		
		Z	M	K
Gracz I	Z	1, 1	4, 0	-1, 0
	M	0, 4	3, 3	-1, 0
	K	0, -1	0, -1	-2, -2

- Czy (s_I, s_{II}) , gdy $s_I = s_{II} = (M; Z \rightarrow K, M \rightarrow M, K \rightarrow K)$, jest równowagą Nasha?
 - Czy (s_I, s_{II}) , gdy $s_I = s_{II} = (M; Z \rightarrow K, M \rightarrow Z, K \rightarrow K)$, jest równowagą Nasha?
 - Ile wszystkich możliwych strategii ma każdy z graczy?
3. (Nieskończony dylemat więźnia). Rozważmy dylemat więźnia z nieskończoną liczbą etapów.
- Rozważ następującą strategię s_{BO} (tzw. strategię bezwzględego odwetu⁴) polegającą na tym, że gramy M do momentu, aż przeciwnik chociaż raz zagra Z . Wtedy gramy Z cały czas. Czy (s_{BO}, s_{BO}) jest równowagą Nasha?
 - Rozważ następującą strategię s_{WW} (wet za wet) polegającą na tym, że gramy M a na każde Z oponenta odpowiadamy jednokrotnym Z . Czy (s_{WW}, s_{WW}) jest równowagą Nasha?
 - Założmy, że obaj gracze mają przyjętą strategię s_{WW} , ale jeden z graczy przez przypadek zagrał Z na pewnym etapie. Jak będą wyglądały akcje graczy w następnych rundach i jaka będzie średnia użyteczność graczy?
 - Rozważ sytuację, w której pierwszy gracz gra w kółko $(M; M; M; M; M; Z; Z; Z)$, a drugi $(M; M; M; M; M; Z; Z; M)$. Jeśli oponent wyłamie się z tego schematu, gracz zaczyna grać cały czas Z . Czy powyższa sytuacja jest równowagą Nasha? Jaki jest wektor wypłat w takiej sytuacji?
 - Czy istnieje równowaga Nasha, w której wektor wypłat jest równy $(2, 3\frac{1}{3})$?⁵
 - Czy istnieje równowaga Nasha, w której wektor wypłat jest równy $(3, \frac{1}{2})$?

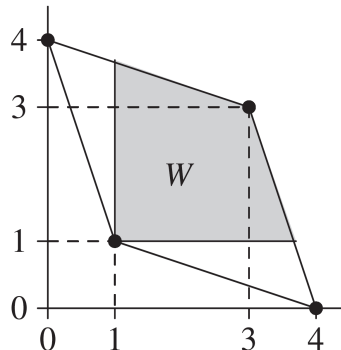
⁴ang. Grim-Trigger Strategy

⁵Zauważ, że poprzedni podpunkt wynikał z tego, że $(1, 2) = \frac{5}{8}(1, 1) + \frac{1}{8}(3, 3) + \frac{2}{8}(0, 4)$.



1.4. Zadania dodatkowe.

- Ile wszystkich możliwych strategii ma każdy z graczy w 3-etapowym dylemacie więźnia?
- Uzasadnij, że w nieskończonym dylemacie więźnia każdy wektor wypłat (gdzie obie współrzędne są liczbami wymiernymi) z obszaru W (patrz rysunek poniżej) ma swoją równowagę Nasha.



2. STRATEGIE MIESZANE

2.1. **Nazewnictwo.** Rozważamy grę 2-osobową, w której każdy z graczy ma dwie akcje do wyboru.

		Gracz 2	
		L	P
Gracz 1	G	a_1, a_2	b_1, b_2
	D	c_1, c_2	d_1, d_2

Niech x oznacza, jaki odsetek etapów Gracz 1 gra akcję L w grze powtarzalnej z nieskończoną liczbą etapów. Wtedy odsetek etapów, w jakich gra strategię P to $1 - x$. Analogicznie, niech y oznacza odsetek etapów, w których Gracz 2 gra akcję G . Wtedy D gra z częstością $1 - y$. Taką *strategię mieszaną* dla Gracza 1 i 2 będziemy oznaczali odpowiednio przez $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(y)$.

Średnia użyteczność dla każdego z graczy jest dana wzorami

$$\gamma_1(x, y) = a_1xy + b_1x(1 - y) + c_1(1 - x)y + d_1(1 - x)(1 - y),$$

$$\gamma_2(x, y) = a_2xy + b_2x(1 - y) + c_2(1 - x)y + d_2(1 - x)(1 - y).$$

Strategią odstraszącą Gracza 1 nazywamy strategię Gracza 2, która minimalizuje następujące wyrażenie:

$$\max_x \gamma_1(x, y).$$

Średnią użyteczność, jaką w takiej sytuacji otrzyma Gracz 1 nazywamy *indywidualną racjonalną wypłatą*.

2.2. Zadania.

- (Wojna płci). Rozważ następującą grę. Małżeństwo próbuje ustalić, jak spędzić najbliższy piątkowy wieczór. Dostępne rozrywki w ich mieście to wyjście na koncert (K) lub obejrzenie meczu piłki nożnej (M). Mężczyzna woli piłkę nożną, podczas gdy kobieta woli koncert, jednak oboje wolą spędzić ten czas razem niż osobno. Przyjemność, jaką każde z nich czerpie z dostępnych możliwości, została określona następująco:
 - Ze wspólnego oglądania meczu piłki nożnej: 2 dla mężczyzny, 1 dla kobiety.
 - Ze wspólnego wyjścia na koncert: 1 dla mężczyzny, 2 dla kobiety.

- Ze spędzenia czasu osobno: 0 dla mężczyzny, 0 dla kobiety.
Tabelę gry przedstawiono poniżej.

		Kobieta	
		M	K
Mężczyzna	M	2, 1	0, 0
	K	0, 0	1, 2

- Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach mieszanych.
- Znajdź strategię odstraszącą w Dylemacie Więźnia. Wyznacz indywidualną racjonalną wypłatę.
 - Znajdź strategię odstraszącą oraz indywidualne racjonalne wypłaty w następujących grach.

		Gracz II	
		L	R
Gracz I	T	-1, 1	1, -1
	B	1, -1	-1, 1

Gra A

		Gracz II	
		L	R
Gracz I	T	6, 6	2, 7
	B	7, 2	0, 0

Gra B

		Gracz II	
		L	R
Gracz I	T	4, 2	2, 3
	B	1, 0	0, 1

Gra C

Michał Gutowski