

Inducja

1. Wyprowadź wzór na sumę pierwszych n sześciątów.
2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokaż, że dla dowolnego n
 - a) $n^3 - n$ jest podzielne przez 6;
 - b) $10^n - 1$ jest podzielne przez 9;
 - c) zachodzi oszacowanie $(n+1)! \geq 2^n \geq (n+1)$;
 - d) zachodzi wzór

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2;$$

- e) zachodzi wzór

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

3. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego, tj. $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Pokaż, że
 - a) $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$,
 - b) $\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}$,
 - c) $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
4. Udowodnij, że każdy wielokąt wypukły o n wierzchołkach ($n \geq 3$) można podzielić na trójkąty za pomocą $n-3$ nieprzecinających się przekątnych.
5. Niech funkcja f spełnia warunek

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Pokaż, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

6. Architekt zaprojektował kwadratowy dziedziniec o wymiarach $2^n \times 2^n$ metrów. W jednym, dowolnie wybranym miejscu (kwadraciku 1×1) ma stanąć wielka fontanna. Resztę dziedzińca należy wykafelkować płytkami w kształcie litery „L” (każda płytka składa się dokładnie z 3 kwadracików 1×1). Udowodnij, że niezależnie od tego, gdzie postawimy fontannę, dziedziniec da się idealnie wykafelkować bez przycinania płytek.
7. Udowodnij poniższe wzory na dwa sposoby (algebraicznie i kombinatorycznie):

$$\text{a) } \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{c) } \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

8. Wyznacz poniższe sumy

$$\text{a) } \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}, \quad r \leq n, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k 2^{n-k}, \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k} \binom{n}{k+m}$$