

TEORIA I PRAKTYKA MOCY
Oddział Intensywnego Myślenia – zajęcia 5
2026-04-11

1. Pokaż, że funkcja $f : A \rightarrow B$ jest
 - (i) iniekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $b \in B$ zbiór $\{a \in A : f(a) = b\}$ jest co najwyżej jednoelementowy;
 - (ii) surjekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $b \in B$ zbiór $\{a \in A : f(a) = b\}$ jest niepusty.
2. Załóżmy, że A jest zbiorem skończonym. Pokaż, że jeśli funkcja $f : A \rightarrow A$ jest iniekcją lub surjekcją, to jest bijekcją. Czy tak jest dla dowolnych zbiorów?
3. Pokaż, że złożenie iniekcji jest iniekcją, a surjekcji surjekcją. Wywnioskuj stąd, że złożenie bijekcji jest bijekcją.
4. Pokaż, że jeśli istnieje iniekcja $f : A \rightarrow B$, to istnieje surjekcja $g : B \rightarrow A$.
5. Wskaż bijekcje pomiędzy parami zbiorów
 - (a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$,
 - (b) $(0, 1)$ i $(2, 5)$,
 - (c) $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$,
 - (d) $(0, 1)$ i $(1, \infty)$,
 - (e) $[0, 1]$ i $[0, 1)$,
 - (f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$.
6. Pokaż, że zbiory $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, \dots, n\} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^n$, gdzie $n > 0$, są przeliczalne.
7. Pokaż, że przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.
8. Pokaż, że przeliczalne są następujące zbiory
 - (a) $\{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists n \in \mathbb{N})(|A| = n)\}$ (czyli zbiór skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$),
 - (b) Zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych,
 - (c) zbiór liczb algebraicznych¹.
9. Pokaż za pomocą metody przekątniowej, że
 - (a) $|\mathbb{N}| < |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$,
 - (b) $|\mathbb{R}| < |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$,
 - (c) $|A| < |\{0, 1\}^A|$,gdzie A jest dowolnym zbiorem.
10. Pokaż, że $|P(A)| = |\{0, 1\}^A|$. Wywnioskuj z tego, że $|A| < |P(A)|$.
11. Pokaż, że nie istnieje zbiór A taki, że $P(A) \subseteq A$. Spróbuj to udowodnić bez powoływania się na moce zbiorów.

¹Czyli pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych.