

ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA
KĄCIK OLIMPIJSKI NR 2 (23 KWIETNIA 2026)
SYMETRYCZNE I CYKLICZNE SUMY NIERÓWNOŚCI

Wiele nierówności można uzyskać przez odpowiednie sumowanie nieujemnych wyrażeń. Biorąc $a = x_i, b = y_i$ w nierówności $(a - b)^2 \geq 0$ oraz sumując po wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy:

$$0 \leq \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i,j} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) = n \sum_i x_i^2 + n \sum_j x_j^2 - 2 \sum_{i,j} x_i x_j.$$

Pierwsze dwie sumy po prawej stronie są sobie równe, a trzecia to kwadrat sumy. Wobec tego:

$$0 \leq 2n \sum_i x_i^2 - 2 \left(\sum_i x_i \right)^2, \quad \text{czyli} \quad \left(\sum_i x_i \right)^2 \leq n \sum_i x_i^2.$$

Stąd zaś wynika nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową: $\frac{1}{n} \sum_i x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i x_i^2}$.

ĆWICZENIE 1. Udowodnij *nierówność Czebyszewa*:

$$\sum_i x_i y_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_i x_i \right) \left(\sum_i y_i \right) \quad \text{jeśli } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ oraz } y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

WSKAZÓWKA: $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$.

ĆWICZENIE 2. Udowodnij *nierówność Cauchy'ego-Schwarza*:

$$\sum_i x_i y_i \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} \sqrt{\sum_i y_i^2}.$$

WSKAZÓWKA: $(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$.

ĆWICZENIE 3. Udowodnij szczególny przypadek *nierówności Muirheada*:

$$\sum_{i,j} x_i^{p+\alpha} x_j^q \geq \sum_{i,j} x_i^p x_j^{q+\alpha} \quad \text{jeśli } x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \alpha \geq 0 \text{ oraz } p \geq q.$$

WSKAZÓWKA: $(x_i^\alpha - x_j^\alpha)(x_i^{p-q} - x_j^{p-q})x_i^q x_j^q \geq 0$.

ĆWICZENIE 4. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

ROZWIĄZANIE: Oznaczmy przez L i P strony dowodzonej nierówności. Z nierówności między średnimi dla $\lambda > 0$ mamy:

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} + \lambda^2 x_{i+1} \geq 2 \sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \cdot \lambda^2 x_{i+1}} = 2\lambda x_i.$$

Sumując stronami te nierówności dla $i = 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy $L + \lambda^2 P \geq 2\lambda P$. Biorąc $\lambda = 1$, otrzymujemy $L \geq P$.

ĆWICZENIE 5. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{x_2^3}{(x_1 + x_3)^2} + \frac{x_3^3}{(x_2 + x_4)^2} + \dots + \frac{x_n^3}{(x_{n-1} + x_1)^2} + \frac{x_1^3}{(x_n + x_2)^2} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{4}.$$

WSKAZÓWKA: Z nierówności między średnimi: $\frac{x_{i+1}^3}{(x_i + x_{i+2})^2} + 2\lambda^3 (x_i + x_{i+2}) \geq 3\lambda^2 x_{i+1}$. Optymalna wartość to $\lambda = \frac{1}{2}$.

ĆWICZENIE 6. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2} + \dots + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{3}.$$

WSKAZÓWKA: Udowodnij, że $\frac{x_i^3}{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2} \geq \frac{2}{3} x_i - \frac{1}{3} x_{i+1}$.

Wiele z powyższych nierówności ma niezliczone inne dowody, ale czasem jest to jedyna metoda.

ZADANIA

ZADANIE 1. Udowodnij, że jeśli $x_1 + \dots + x_n = 0$ oraz $x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$, to $x_k \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ dla pewnego k .

ZADANIE 2. Udowodnij, że jeśli $x_1, \dots, x_n > 0$ oraz $x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$, to

$$\frac{x_1^3}{x_2} + \frac{x_2^3}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^3}{x_n} + \frac{x_n^3}{x_1} \geq n.$$

[BAŁKANY 1999]

ZADANIE 3. Udowodnij, że jeśli $x_1, \dots, x_n > 0$ oraz $x_1 + \dots + x_n = 2$, to

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq 1.$$

[JAPONIA 1997; RUMUNIA 2006]

ZADANIE 4. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{x_2^3}{x_1 + x_3} + \frac{x_3^3}{x_2 + x_4} + \dots + \frac{x_n^3}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_1^3}{x_n + x_2} \geq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2}.$$

ZADANIE 5. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{(x_2 + x_3)^3}{x_1 + x_4} + \frac{(x_3 + x_4)^3}{x_2 + x_5} + \dots + \frac{(x_n + x_1)^3}{x_{n-1} + x_2} + \frac{(x_1 + x_2)^3}{x_n + x_3} \geq 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

ZADANIE 6*. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{(x_2 + x_3)^3}{x_1 + x_3} + \frac{(x_3 + x_4)^3}{x_2 + x_4} + \dots + \frac{(x_n + x_1)^3}{x_{n-1} + x_1} + \frac{(x_1 + x_2)^3}{x_n + x_2} \geq 3(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Czy nierówność zachodzi ze stałą 4 (zamiast 3) po prawej stronie?

ZADANIE 7. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ oraz $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$, to:

$$\frac{x_2^3}{(1+x_1)(1+x_3)} + \frac{x_3^3}{(1+x_2)(1+x_4)} + \dots + \frac{x_n^3}{(1+x_{n-1})(1+x_1)} + \frac{x_1^3}{(1+x_n)(1+x_2)} \geq \frac{n}{4}.$$

[IMO SL 1998]

ZADANIE 8. Udowodnij, że jeśli $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = n$, to:

$$(x_1 x_2 + 2)^2 + (x_2 x_3 + 2)^2 + \dots + (x_{n-1} x_n + 2)^2 + (x_n x_1 + 2)^2 \geq n.$$

ZADANIE 9*. Niech $x_{n+1} = x_1$. Udowodnij, że:

$$2 \sum_{i=1}^n x_i^2 x_{i+1} \geq \sum_{i=1}^n (4x_i + 3x_i^2 - x_i^4 - 4).$$

WSKAZÓWKI DO ZADAŃ

ZADANIE 1. Udowodnij, że jeśli $x_1 + \dots + x_n = 0$ oraz $x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$, to $x_k \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ dla pewnego k .

WSKAZÓWKA: Jeśli $-(n-1)a < x_k < a$, to $(a-x_k)(x_k+(n-1)a) > 0$.

ZADANIE 2. Udowodnij, że jeśli $x_1, \dots, x_n > 0$ oraz $x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$, to

$$\frac{x_1^3}{x_2} + \frac{x_2^3}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^3}{x_n} + \frac{x_n^3}{x_1} \geq n.$$

[BAŁKANY 1999]

WSKAZÓWKA: $2\frac{a^3}{b} + \lambda^3 b \geq 3\lambda a^2$.

ZADANIE 3. Udowodnij, że jeśli $x_1, \dots, x_n > 0$ oraz $x_1 + \dots + x_n = 2$, to

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq 1.$$

[JAPONIA 1997; RUMUNIA 2006]

WSKAZÓWKA: $\frac{a^2}{a+b} + \lambda^2(a+b) \geq 2\lambda a$.

ZADANIE 4. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{x_2^3}{x_1+x_3} + \frac{x_3^3}{x_2+x_4} + \dots + \frac{x_n^3}{x_{n-1}+x_1} + \frac{x_1^3}{x_n+x_2} \geq \frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{2}.$$

WSKAZÓWKA: $2\frac{b^3}{a+c} + \lambda^3(a+c)^2 \geq 3\lambda b^2$.

ZADANIE 5. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{(x_2+x_3)^3}{x_1+x_4} + \frac{(x_3+x_4)^3}{x_2+x_5} + \dots + \frac{(x_n+x_1)^3}{x_{n-1}+x_2} + \frac{(x_1+x_2)^3}{x_n+x_3} \geq 2(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2).$$

WSKAZÓWKA: $\frac{(b+c)^3}{a+d} + \lambda^2(b+c)(a+d) \geq 2\lambda(b+c)^2$.

ZADANIE 6*. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, to:

$$\frac{(x_2+x_3)^3}{x_1+x_3} + \frac{(x_3+x_4)^3}{x_2+x_4} + \dots + \frac{(x_n+x_1)^3}{x_{n-1}+x_1} + \frac{(x_1+x_2)^3}{x_n+x_2} \geq 3(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2).$$

Czy nierówność zachodzi ze stałą 4 (zamiast 3) po prawej stronie?

WSKAZÓWKA: Stała 3: $\frac{(b+c)^3}{a+c} \geq 3b^2 - 3ab + 3bc$. Stała 4: $x_k = k$ z wyjątkiem $x_n = \frac{4}{3}n$.

ZADANIE 7. Udowodnij, że jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ oraz $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$, to:

$$\frac{x_2^3}{(1+x_1)(1+x_3)} + \frac{x_3^3}{(1+x_2)(1+x_4)} + \dots + \frac{x_n^3}{(1+x_{n-1})(1+x_1)} + \frac{x_1^3}{(1+x_n)(1+x_2)} \geq \frac{n}{4}.$$

WSKAZÓWKA: $\frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \lambda^3(1+a) + \lambda^3(1+c) \geq 3\lambda^2 b$. [IMO SL 1998]

ZADANIE 8. Udowodnij, że jeśli $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = n$, to:

$$(x_1x_2+2)^2 + (x_2x_3+2)^2 + \dots + (x_{n-1}x_n+2)^2 + (x_nx_1+2)^2 \geq n.$$

WSKAZÓWKA: $((a-1)^2 + (b+1)^2)((a+1)^2 + (b-1)^2) \geq 0$.

ZADANIE 9*. Niech $x_{n+1} = x_1$. Udowodnij, że:

$$2 \sum_{i=1}^n x_i^2 x_{i+1} \geq \sum_{i=1}^n (4x_i + 3x_i^2 - x_i^4 - 4).$$

WSKAZÓWKA: $(a^2 + b - 2)^2 \geq 0$.