



ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA

W TO MI GRAJ¹

9 MAJA 2026

1. GRY W POSTACI EKSTENSYWNEJ (GRY DYNAMICZNE)

1.1. Nazewnictwo. *Strategią* gracza i nazywamy przepis, jaką konkretną decyzję powinien ten gracz podejmować w każdym możliwym fragmencie gry.

Strategią wygrywającą gracza i nazywamy taką strategię, która zawsze doprowadzi tego gracza do wygranej, niezależnie jak zagrają inni gracze.

Gra z 4 polami (David Gale)²

Zaczynamy z tabelą ponumerowaną liczbami 1, 2, 3 i 4.

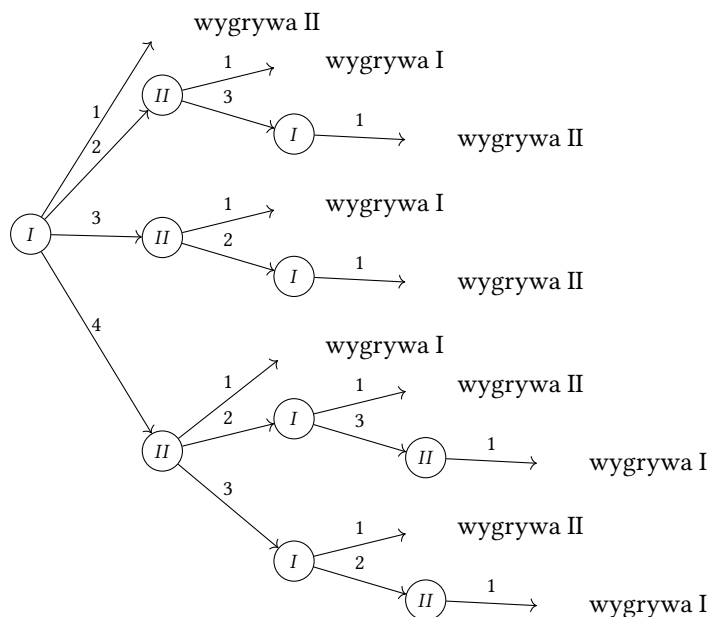
2	4
1	3

Każdy z dwóch graczy naprzemiennie, rozpoczynając od Gracza I, wybiera jedno niezakreślone pole z tabeli i je zakreśla na określonych zasadach:

1. Pole 4 nie może być zakreślone, jeżeli pole 2 lub 3 zostały już zakreślone.
2. Gra się kończy, gdy pole 1 zostanie zakreślone. Gracz, który je zakreśli, przegrywa.

1.2. Zadania.

1. Znajdź na drzewie gry strategię wygrywającą w grę „z 4 polami”.

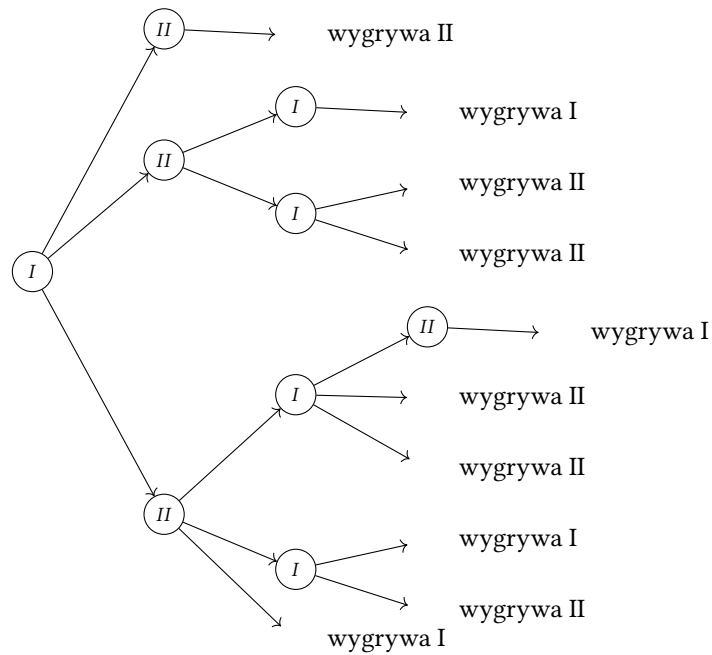


2. Określ, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Jeśli tak, zaznacz ją na drzewie gry.³
 - a) Gra 1

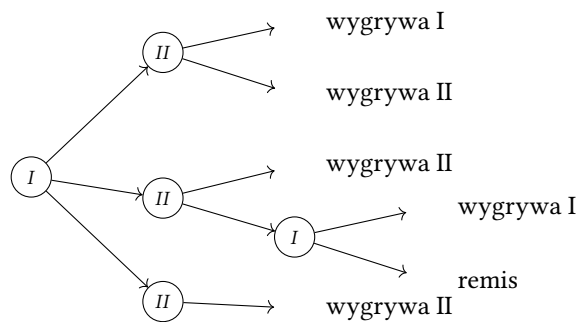
¹Zadania zostały opracowane na bazie książki *Game Theory* – Michael Maschler, Eilon Solan, Shmuel Zamir (2013).

²Zobacz też Zadanie dodatkowe B.

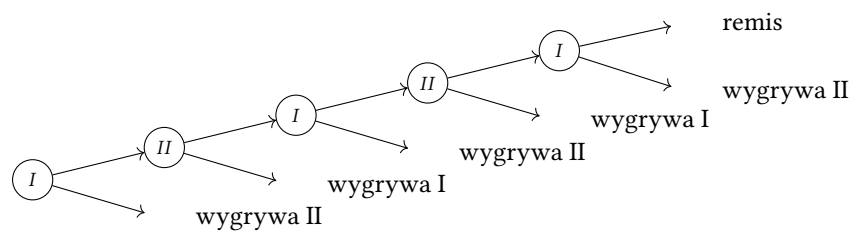
³Twierdzenie von Neumanna (1928) mówi, że w każdej grze 2-osobowej w postaci ekstensywnej (bez losowości, ze skończonym drzewem i z pełną informacją o ruchach innych graczy), gdzie wynikami gry może być tylko zwycięstwo Gracza I, zwycięstwo Gracza II lub remis, tylko jedna z poniższych alternatyw jest prawdziwa: Gracz I ma strategię wygrywającą, Gracz II ma strategię wygrywającą, obaj gracze mają strategię gwarantującą co najmniej remis.



b) Gra 2



c) Gra 3



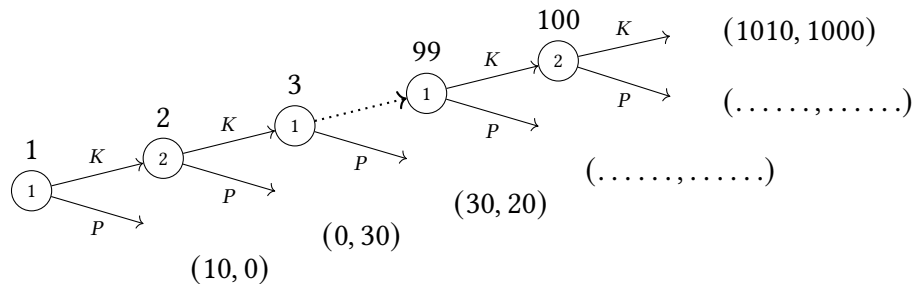
3. (Nim w wariantcie Misere). Rozpatrz następującą grę. Mamy trzy kupki z zapalnikami. W pierwszej jest m zapalników, w drugiej n , a w trzeciej k . Każdy z dwóch graczy naprzemiennie, rozpoczynając od Gracza I, wybiera jedną z kupek i zabiera z niej co najmniej jedną zapalnikę. Gracz, który zabierze ostatnią zapalnikę, przegrywa.⁴
 - a) Zagrajcie kilka razy w grę, gdy $(m, n, k) = (1, 2, 3)$.
 - b) Narysuj drzewo gry i określ, kto ma strategię wygrywającą, gdy $(m, n, k) = (1, 1, 1)$.
 - c) Zrób to samo, gdy $(m, n, k) = (1, 2, 0)$.
 - d) Zrób to samo, gdy $(m, n, k) = (0, 0, 3)$.
 - e) Kto ma strategię wygrywającą, gdy $(m, n, k) = (0, 2, 2)$? Jaka to strategia?
 - f) Odpowiedz na to samo pytanie, gdy $(m, n, k) = (1, 1, 2)$.
 - g) Odpowiedz na to samo pytanie, gdy $(m, n, k) = (1, 0, 3)$.

⁴W zwykłym wariantcie gry Nim ten gracz wygrywa.



- h) Na podstawie powyższych wyników odpowiedzcie na to pytanie gdy $(m, n, k) = (1, 2, 2)$, $(m, n, k) = (1, 1, 3)$ oraz $(m, n, k) = (0, 2, 3)$.
- i) Kto ma strategię wygrywającą, gdy $(m, n, k) = (1, 2, 3)$?
4. (Gra w Stonogę). Rozważ następującą grę dwuosobową. Każdy z graczy ma pojemnik na pieniądze. Gracz 1 rozpoczyna z banknotem 10 zł, natomiast pojemnik Gracza 2 jest pusty. Gracze wykonują swoje tury na przemian, rozpoczynając od Gracza 1. W każdej swojej turze, gracz może albo spasować (P), albo kontynuować (K).
- Jeżeli gracz spasuje, gra się kończy, a każdy z graczy otrzymuje pulę pieniędzy zgromadzoną w swoim pojemniku.
 - Jeżeli gracz kontynuuje rozgrywkę, musi przekazać 10 zł ze swojego pojemnika, do pojemnika innego gracza. Dodatkowo, do pojemnika tego innego gracza dorzucane jest 20 zł.
 - Jeżeli żaden z graczy wcześniej nie spasuje, gra się kończy po 100 turach.

Poniżej przedstawiono drzewo tej gry, gdzie wynik przedstawiono w postaci (u_1, u_2) , gdzie u_i to wypłata i -tego gracza w złotych. Nad każdym wierzchołkiem umieszczono numer aktualnej tury.

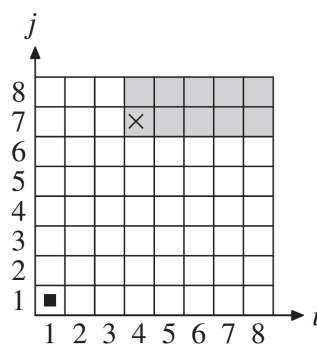


- a) Uzupełnij brakujące wypłaty graczy w turach 99 oraz 100.
- b) Jak powinien zagrać Gracz 1, jeżeli przed grą może ustalić wspólną strategię z Graczem 2 i może mu zaufać, że będzie się trzymał ustaleń?
- c) Jak powinien zagrać Gracz 1, jeżeli wie, że Gracz 2 ma nastawienie „byle sąsiad miał gorzej”?

1.3. Zadania dodatkowe.

- A. Czy istnieje strategia wygrywająca w kółko i krzyżyk?
- B. (Gra w odgryzanie tabliczki czekolady). Rozważ wariant gry z zadania 1, gdzie zamiast tabeli wymiaru 2×2 , jest tabela wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n > 1$ a zakreślenie danego pola, blokuje wszystkie pola nad nim, na prawo od niego i północny-wschód od niego (patrz Rysunek 1). Kto zakreśli pole w lewym dolnym rogu (zatrutą kostkę), przegrywa. Pokaż, że gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą.⁵

⁵Gra w literaturze nazywa się Chomp i została opracowana przez Davida Gale'a (1974).



RYSUNEK 1. Wariant gry 8×8 . Po zakreśleniu pola $(4, 7)$, na szaro zaznaczono pola zablokowane. Czarnym kwadracikiem zaznaczono zatrutą kostkę.

- C. Rozważ następującą grę. Obaj gracze naprzemiennie, zaczynając od Gracza I, umieszczają na okrągłym stole jednozłotówki w taki sposób, by jedna nie leżała na drugiej (choć mogą się stykać) oraz by żadna z nich nie wystawała poza zarys stołu. Gracz, który nie ma już możliwości umieścić kolejnej monety, przegrywa. Kto ma strategię wygrywającą w tej grze? Jaka to strategia?

2. GRY STRATEGICZNE

2.1. Nazewnictwo. *Równowagą Nasha* nazywamy taki wektor strategii $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ (gdzie s_i to pewna strategia gracza i), że jeśli każdy z graczy i gra strategię s_i , to żaden z graczy j nie zyskałby, gdyby zmienił swoją strategię s_j na dowolną inną.

Mówimy, że równowaga Nasha jest *Pareto optymalna*, gdy nie ma żadnego innego wyniku gry, który byłby lepszy dla chociaż jednego z graczy, a dla żadnego innego gracza nie byłby gorszy.

Mówimy, że strategia s gracza i jest *ściśle zdominowana* przez strategię d gracza i , jeśli strategia d gwarantuje graczowi i lepszy wynik, niezależnie, jak zagrają pozostali gracze. Mówimy, że strategia s gracza i jest *słabo zdominowana* przez strategię d gracza i , jeśli strategia d gwarantuje graczowi i niegorszy wynik, niezależnie, jak zagrają pozostali gracze oraz istnieje scenariusz, że zagwarantuje mu lepszy wynik.

2.2. Zadania.

1. (Gra w Stonogę). Rozważ grę w postaci ekstensywnej z Zadania 4. z poprzedniego działu. Załóżmy, że są tylko dwie możliwe strategie dla każdego z graczy:

- K – kontynuować grę na każdym kroku;
- P – pasować najszybciej jak się da.

Gry strategiczne dla dwóch graczy przedstawia się zazwyczaj w postaci tabeli, jak to zrobiono poniżej.

		Gracz II	
		K	P
Gracz I	K	1010, 1000	0, 30
	P	10, 0	10, 0

- Znajdź wszystkie równowagi Nasha dla tej gry.
- Która z tych równowag jest Pareto optymalna?
- Porównaj powyższe rozważania z podpunktem c) Zadania 4. z poprzedniego działu.

2. (Dylemat więźnia). Dwóch podejrzanych zostało zatrzymanych przez policję. Policja, nie mając wystarczających dowodów do postawienia zarzutów, rozdziela więźniów i przedstawia każdemu z nich tę samą ofertę: jeśli będzie zeznawać przeciwko drugiemu, a drugi będzie milczeć, to zeznający wyjdzie na wolność, a milczący dostanie dziesięcioletni wyrok. Jeśli obaj będą milczeć, obaj odsiedzą 1 rok za inne przewinienia. Jeśli obaj będą zeznawać, obaj dostaną 6-letnie wyroki. Każdy z nich musi podjąć decyzję niezależnie i żaden nie dowie się, czy drugi milczy czy zeznaje, aż do momentu wydania wyroku.⁶

Ustalmy, że:

- wyjście na wolność jest dla każdego z więźniów oceniane jako 5 punktów użyteczności;
- 6-letni wyrok jest oceniany jako 1 punkt użyteczności;
- roczny wyrok jako 0 punktów użyteczności.

Poniżej przedstawiono tabelę tej gry, gdzie strategie oznaczono następująco:

- Z – zeznawać;
- M – milczeć.

		Więzień II	
		Z	M
Więzień I	Z	1, 1	5, 0
	M	0, 5	4, 4

Określ równowagę Nasha tej gry i oceń, czy jest Pareto optymalna.

3. Rozpatrz następującą grę strategiczną.

		Gracz II		
		L	C	P
Gracz I	G	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

- a) Które strategie są ściśle zdominowane?
 b) Zauważ, że w równowadze Nasha nie może być strategii ściśle zdominowanych. Wykreśl te strategie, a następnie poszukaj równowagi Nasha wśród pozostałych komórek tabeli.
4. Rozpatrz następującą grę strategiczną.

		Gracz II		
		L	C	P
Gracz I	G	1, 2	2, 3	0, 3
	$\acute{S}$	2, 2	2, 1	3, 2
	D	2, 1	0, 0	1, 0

- a) Wykreślaj po kolei strategie słabo zdominowane, a następnie poszukaj równowagi Nasha wśród pozostałych komórek tabeli.

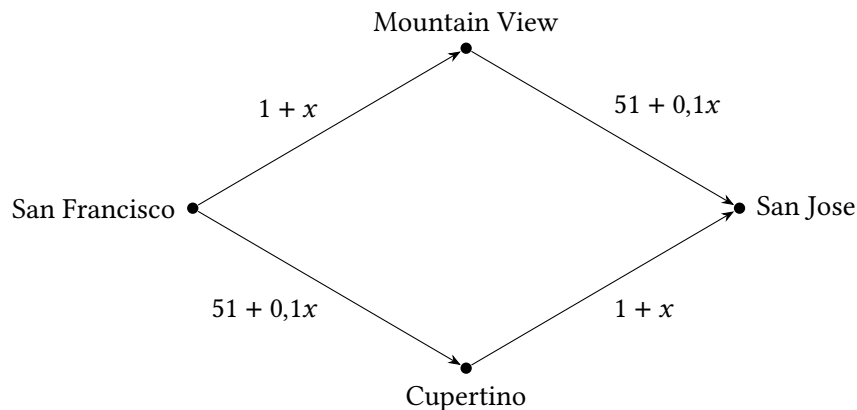
⁶Opis na bazie [Wikipedii](#).



- b) Spróbuj wykreślić strategie słabo zdominowane w innej kolejności. Znow poszukaj równowagi Nasha. Czy wynik jest ten sam?
5. (Niebezpieczna równowaga). Rozpatrz następującą grę strategiczną.

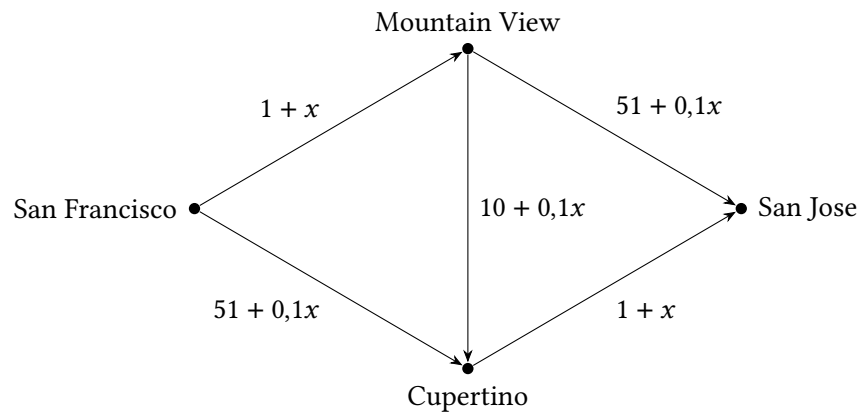
		Gracz II	
		L	P
Gracz I	G	2, 1	2, -20
	Ś	3, 0	-10, 1
	D	-100, 2	3, 3

- a) Określ równowagę Nasha w tej grze.
- b) Co się stanie z wynikiem Gracza I, jeśli Gracz II przez pomyłkę nie zagra optymalnie, zgodnie z tą równowagą?
- c) Jak powinien zagrać Gracz I jeśli ceni sobie bezpieczeństwo i chce się uniezależnić od nieroztropności Gracza II?
6. (Paradoks Braessa). Są dwie główne drogi łączące San Francisco i San Jose, północna przez Mountain View i południowa przez Cupertino. Czas potrzebny na przebycie każdego fragmentu drogi zależy od liczby aut x na danej drodze (przejeżdżających w każdej minucie) i został przedstawiony na poniższym diagramie (w minutach).



Zauważmy, że w danym momencie startuje 60 aut z San Francisco, kierujących się do San Jose. Potraktuj powyższą sytuację jako grę z 60 graczami.

- a) Rozważmy sytuację, że 30 aut zdecydowało się „zagrać pod” drogę północną, a pozostałe 30 pod południową. Czy któremukolwiek z graczy opłaca się zmienić strategię i jednak wybrać inną trasę?
- b) Jaki będzie potrzebny czas (w minutach) na dostanie się z San Francisco do San Jose na każdej z tras?
- c) Rozważmy sytuację, gdzie Kalifornijski Departament Transportu postanowił dobudować nową drogę jednokierunkową z Mountain View do Cupertino, jak na poniższym diagramie.



Rozważmy sytuację z podpunktu a). Czy któremuś z kierowców opłaca się zmienić strategię i jechać do Mountain View, a potem drogą jednokierunkową do Cupertino, a stamtąd dopiero do San Jose?

- d) Rozważ sytuację, gdzie 20 aut jedzie dalej trasą północną, 20 dalej wybiera trasę południową, ale pozostałe 20 jedzie do Mountain View, a potem drogą jednokierunkową do Cupertino, a stamtąd dopiero do San Jose. Czy teraz jest to równowaga Nasha? Jaki jest łączny czas (w minutach) potrzebny na dostanie się do San Jose każdą z tras? Dlaczego opisana sytuacja jest nazywana paradoksem? ⁷
7. (Aukcja pierwszej i drugiej ceny). Rozważmy aukcję, w której każdy z uczestników deklaruje potajemnie kwotę jaką jest w stanie zapłacić (np. pisze kwotę na kartce, umieszcza kartkę w kopercie i ją zapieczętowuje). Wygrywa osoba, która zaoferuje najwyższą kwotę (w przypadku remisu wygrany jest losowany). Dla uproszczenia będziemy zakładać, że w aukcji biorą udział tylko dwie osoby.

- a) Załóżmy, że jest to aukcja pierwszej ceny, to znaczy że wygrany płaci kwotę, którą on zaoferował. ⁸ Niech v_i będą pewnymi liczbami dodatnimi, $i \in \{1, 2\}$ (można powiedzieć, że jest to kwota, na którą gracz i „wycenia” licytowany przedmiot). Przez x_i oznaczmy kwotę (strategię) oferowaną przez gracza i , a wynik gry dla gracza i niech będzie dany wzorem ⁹:

$$u_i(x_i) = \begin{cases} v_i - x_i, & \text{gdy gracz } i \text{ wygra aukcję;} \\ 0, & \text{gdy gracz } i \text{ nie wygra aukcji.} \end{cases}$$

Dla ustalenia uwagi niech $v_1 = 300$, $v_2 = 270$.

Dla jakich x_1 strategia Gracza 1 jest silnie zdominowana?

- b) Czy istnieje równowaga Nasha w tej grze? Jak rozumieć wynik?
- c) Załóżmy (rozsądnie), że Gracz 1 nie wie, jak licytowany przedmiot wycenia Gracz 2. Czy ma on pokusę, by licytować za mniej, niż wycenia ten przedmiot? Czy jest możliwe, że przedmiot trafi do osoby, która ten przedmiot niżej wycenia?
- d) Rozważmy teraz sytuację, że jest to aukcja drugiej ceny, to znaczy że wygrany płaci drugą najwyższą zaoferowaną kwotę (przykładowo, jeśli Gracz 1 zaoferował wyższą

⁷Podobne efekty jak w tym przykładzie zostały zaobserwowane w rzeczywistości: gdy jedna z dróg w Nowym Yorku została zamknięta, czas przejazdu aut się zmniejszył; tak samo w Stuttgardzie, gdzie otworzenie nowej drogi wydłużyło czas przejazdu.

⁸ang. First Price Auction

⁹To założenie jest nierealistyczne, ponieważ jeśli gracz i wycenia przedmiot na kwotę v_i i płaci v_i , to według powyższego wzoru nic nie zyskuje (tak jakby w ogóle nie wygrał). A przecież zmarnował czas na wzięcie udziału w aukcji, czego w naszych założeniach nie bierzemy pod uwagę (chyba, że sam udział w akcji jest dla niego wartością samą w sobie, dokładnie równą kosztowi zmarnowanego czasu).

kwotę od Gracza 2, to Gracz 1 płaci kwotę zaoferowaną przez Gracza 2).¹⁰ Przy takich założeniach wynik gry będzie dany wzorami (pomińmy przypadek remisu):

$$u_1(x_1) = \begin{cases} v_1 - x_2, & \text{gdy } x_1 > x_2; \\ 0, & \text{gdy } x_1 < x_2. \end{cases}$$

$$u_2(x_2) = \begin{cases} v_2 - x_1, & \text{gdy } x_2 > x_1; \\ 0, & \text{gdy } x_2 < x_1. \end{cases}$$

Które strategie są silnie zdominowane? Czy istnieje równowaga Nasha w takiej grze?

e) Odpowiedz na to samo pytanie co w podpunkcie c) w kontekście licytacji drugiej ceny.

f) Gdzie używa się licytacji drugiej ceny (lub czegoś bardzo podobnego)?

8. (Dylemat bezpieczeństwa). Rozważmy następującą grę opisującą sytuację pomiędzy USA a ZSRR po II Wojnie Światowej. Każdy z graczy: USA i ZSRR, ma dwie strategie:

- P – produkować broń nuklearną;
- N – nie produkować broni nuklearnej.

Uwzględniając koszty produkcji broni oraz fakt, że istnienie broni stwarza niezerowe ryzyko wybuchu wojny nuklearnej, grę można zdefiniować następująco.

		ZSRR	
		N	P
USA	N	4, 4	1, 3
	P	3, 1	2, 2

Określ równowagi Nasha w tej grze. Która równowaga jest bardziej prawdopodobna? Jak potoczyła się rzeczywistość?

9. Określ wszystkie równowagi Nasha w poniższych grach.

		Gracz II			
		a	b	c	d
Gracz I	α	6, 2	6, 3	7, 6	2, 8
	β	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7

Gra 1

		Gracz II	
		a	b
Gracz I	α	9, 5	5, 3
	β	8, 6	8, 4

Gra 2

		Gracz II			
		a	b	c	d
Gracz I	α	-1, 20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
	β	27, 20	13, -1	21, 2	13, -1
	γ	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

Gra 3

2.3. Zadania dodatkowe.

A. (Gra w Stonogę). Tym razem, w przeciwieństwie do Zadania 1., rozważ grę strategiczną ze wszystkimi możliwymi strategiami graczy:

¹⁰ang. Second Price Auction



- P_n – spasować w n -tej turze.
 - K – kontynuować grę na każdym kroku.
- a) Narysuj fragment tabeli gry.
 b) Określ, jakie są równowagi Nasha w tej grze.
 c) Porównaj powyższe rozważania z Zadaniem 1.
- B. (Paradoks Braessa). Rozważ grę z Zadania 6.
- a) Wykaż, że sytuacja opisana w podpunkcie a) Zadania 6. jest jedyną równowagą Nasha w tej grze.
 b) Wykaż, że sytuacja opisana w podpunkcie d) Zadania 6. jest jedyną równowagą Nasha w grze po wybudowaniu nowej drogi.
- C. Rozważ poniższą grę dla trzech graczy. Gracz I wybiera wiersz tabeli (A lub B), Gracz II kolumnę (a lub b), a Gracz III tabelę (α , β lub γ). Znajdź wszystkie równowagi Nasha w tej grze.

	a	b
A	0, 0, 5	0, 0, 0
B	2, 0, 0	0, 0, 0
	α	

	a	b
A	1, 2, 3	0, 0, 0
B	0, 0, 0	1, 2, 3
	β	

	a	b
A	0, 0, 0	0, 0, 0
B	0, 5, 0	0, 0, 4
	γ	

Michał Gutowski