

ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA

OIMPIADA NR 1 (14–15 MARCA 2026)

TRENING PRZED FINAŁEM OM, DZIEŃ 2

ZADANIE 4. Niech r_n oznacza resztę z dzielenia liczby n^{n^n} przez 67. Udowodnij, że istnieją dodatnie liczby całkowite N oraz T , takie że $r_{n+T} = r_n$ dla $n \geq N$.

ZADANIE 5. Małgosia ma wypukły wielościan, którego jedna ściana jest czworokątem, a wszystkie pozostałe są trójkątami. Małgosia sprawdziła, że może pokolorować każdą krawędź swojej bryły na amarantowo, bordowo lub cynobrowo w taki sposób, aby każdy trójkąt utworzony z tych krawędzi miał boki trzech różnych kolorów.

Jaś bardzo nie lubi czworokątów. Poprosił więc Marysię o dorysowanie jednej z przekątnych czworokątnej ściany, która podzieli ją na dwa trójkąty. Czy Małgosia może spełnić życzenie Jasia, a potem pokolorować wszystkie krawędzie swojego wielościanu oraz dorysowaną przekątną w taki sposób, aby każdy trójkąt na powierzchni bryły miał boki trzech różnych kolorów?

ZADANIE 6. Kula Ω jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$. Niech a, b, c, d oznaczają długości odcinków stycznych do Ω poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C, D . Udowodnij, że środek kuli Ω należy do czworościanu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{d}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{a}.$$

Zasady:

- Masz pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań, jak na finale OM.
- Rozwiązania w postaci trzech plików PDF zgłoś przez formularz internetowy.
- Mogą to być skany/zdjęcia odręcznych notatek, możesz też pisać na tablecie lub komputerze.
- Pisz uczciwie. To nie prawdziwe zawody, chodzi tylko o to, by się sprawdzić.
- Jeśli jesteś uczestnikiem OIM, otrzymasz mailem oceny i komentarze do swoich rozwiązań.
- Jeśli nie, to w miarę możliwości też, ale być może nieco później, sprawdzanie trochę trwa.