



ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA

OIMPIADA NR 1 (14–15 MARCA 2026)

TRENING PRZED FINAŁEM OM, DZIEŃ 1

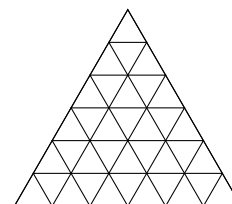
ZADANIE 1. Jaś ma planszę w kształcie trójkąta równobocznego o boku 6, podzieloną liniami równoległymi do jej boków na 36 pól w kształcie trójkątów równobocznych o boku 1. Każde pole Jaś chce ozdobić gwiazdką. Do ich zrobienia używa pieczętek o następujących kształtach:



oraz



.



Jaś dba o estetykę: na każdym polu chce odbić gwiazdkę tylko raz i nie chce ubrudzić ramy swojej planszy. Każda z pieczętek zdobi więc za każdym razem trzy jeszcze nieozdobione pola planszy. Czy Jaś może zrealizować postawione sobie zadanie?

ZADANIE 2. Niech:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4).$$

Liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 spełniają warunek $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$ i mają następującą własność: jeśli $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, to

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \leq F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Wyznacz wartość $F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

ZADANIE 3. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , a proste AP , BP i CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D , E i F . Prosta BE przecina prostą DF w punkcie X . Załóżmy, że:

$$|\angle EDF| = |\angle ACX| = 90^\circ.$$

Udowodnij, że:

$$|\angle CFD| = |\angle CAD| + |\angle CBE|.$$

Zasady:

- Masz pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań, jak na finale OM.
- Rozwiązania w postaci trzech plików PDF zgłoś przez formularz internetowy.
- Mogą to być skany/zdjęcia odręcznych notatek, możesz też pisać na tablecie lub komputerze.
- Pisz uczciwie. To nie prawdziwe zawody, chodzi tylko o to, by się sprawdzić.
- Jeśli jesteś uczestnikiem OIM, otrzymasz mailem oceny i komentarze do swoich rozwiązań.
- Jeśli nie, to w miarę możliwości też, ale być może nieco później, sprawdzanie trochę trwa.

**ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA**

OIMPIADA NR 1 (14–15 MARCA 2026)

TRENING PRZED FINAŁEM OM, DZIEŃ 2

ZADANIE 4. Niech r_n oznacza resztę z dzielenia liczby n^{n^n} przez 67. Udowodnij, że istnieją dodatnie liczby całkowite N oraz T , takie że $r_{n+T} = r_n$ dla $n \geq N$.

ZADANIE 5. Małgosia ma wypukły wielościan, którego jedna ściana jest czworokątem, a wszystkie pozostałe są trójkątami. Małgosia sprawdziła, że może pokolorować każdą krawędź swojej bryły na amarantowo, bordowo lub cynobrowo w taki sposób, aby każdy trójkąt utworzony z tych krawędzi miał boki trzech różnych kolorów.

Jaś bardzo nie lubi czworokątów. Poprosił więc Marysię o dorysowanie jednej z przekątnych czworokątnej ściany, która podzieli ją na dwa trójkąty. Czy Małgosia może spełnić życzenie Jasia, a potem pokolorować wszystkie krawędzie swojego wielościanu oraz dorysowaną przekątną w taki sposób, aby każdy trójkąt na powierzchni bryły miał boki trzech różnych kolorów?

ZADANIE 6. Kula Ω jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$. Niech a, b, c, d oznaczają długości odcinków stycznych do Ω poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C, D . Udowodnij, że środek kuli Ω należy do czworościanu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

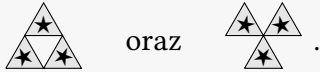
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{d}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{a}.$$

Zasady:

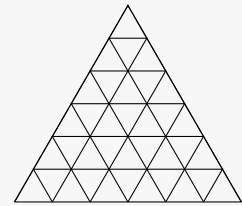
- Masz pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań, jak na finale OM.
- Rozwiązania w postaci trzech plików PDF zgłoś przez formularz internetowy.
- Mogą to być skany/zdjęcia odręcznych notatek, możesz też pisać na tablecie lub komputerze.
- Pisz uczciwie. To nie prawdziwe zawody, chodzi tylko o to, by się sprawdzić.
- Jeśli jesteś uczestnikiem OIM, otrzymasz mailem oceny i komentarze do swoich rozwiązań.
- Jeśli nie, to w miarę możliwości też, ale być może nieco później, sprawdzanie trochę trwa.



ZADANIE 1. Jaś ma planszę w kształcie trójkąta równobocznego o boku 6, podzieloną liniami równoległymi do jej boków na 36 pól w kształcie trójkątów równobocznych o boku 1. Każde pole Jaś chce ozdobić gwiazdką. Do ich zrobienia używa pieczętek o następujących kształtach:

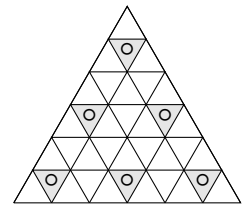


oraz



Jaś dba o estetykę: na każdym polu chce odbić gwiazdkę tylko raz i nie chce ubrudzić ramy swojej planszy. Każda z pieczętek zdobi więc za każdym razem trzy jeszcze nieozdobione pola planszy. Czy Jaś może zrealizować postawione sobie zadanie?

Rozwiązanie: Plansza ma 15 trójkątnych pól ∇ z wierzchołkami ułożonymi odwrotnie niż plansza. Każde odbicie pieczętki zdobi albo trzy takie pola, albo żadnego, zatem Jaś musi pięciokrotnie odbić pieczętkę na trzech takich polach. Z drugiej za każdym razem Jaś może ozdobić co najwyżej jedno pole z sześciu zaznaczonych na rysunku obok. Zatem Jaś nie zrealizuje swojego zadania. $\square$



Uwaga: Rozważmy ogólniejsze zadanie, w którym plansza ma bok długości n . Podzielmy pola planszy na dwa typy: pola $\triangle$ (z wierzchołkami ułożonymi tak jak plansza) oraz pola ∇ (z wierzchołkami ułożonymi odwrotnie niż plansza). Każde odbicie pieczętki ozdabia tylko pola jednego typu, więc możemy je rozważać osobno. Co więcej, pola ∇ możemy obrócić o 60° , uzyskując w ten sposób to samo zadanie dla pól $\triangle$ na planszy rozmiaru $n - 1$. Odtąd więc będziemy się zajmowali wyłącznie polami $\triangle$ i dla wygody będziemy je nazywać po prostu polami.

Mamy zatem nowe zadanie: chcemy ozdobić (przy pomocy tych samych pieczętek i z zachowaniem tych samych zasad) $\frac{1}{2}n(n+1)$ pól $\triangle$ ułożonych w trójkątną planszę o boku długości n . Spróbujmy wyznaczyć wartości n , dla których istnieje rozwiązanie. Z pewnością liczba pól musi być wielokrotnością 3, a więc n musi dawać resztę z dzielenia przez 3 różną od 1.

Krok 1. Gdy $n = 2$, plansza ma kształt jednej z pieczętek, więc Jasiowi się uda ją udekorować.

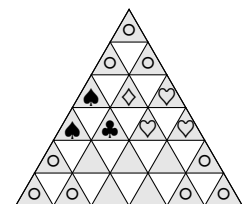
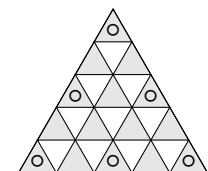
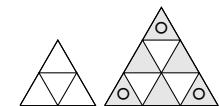
Niech $n = 3$. Oznaczmy trzy pola narożne. Każde użycie pieczętki ozdobi co najwyżej jedno takie pole, więc ozdobienie ich wszystkich wymaga co najmniej trzykrotnego odbicia pieczętki. Jednak łączna liczba pól na planszy to 6, mniej niż 9. Wobec tego dla $n = 3$ ozdobienie wszystkich pól nie jest możliwe.

Ten sam argument działa w przypadku $n = 5$: do ozdobienia sześciu pól w rogach planszy i przy środkach jej boków potrzeba co najmniej sześciu odbić pieczętek, ale pól jest 15, mniej niż 18, sprzeczność.

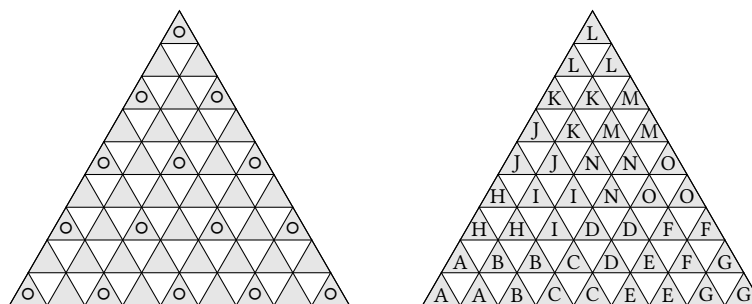
Gdy $n = 6$, odpowiedzią ponownie jest „nie”, ale dowód jest odrobinę dłuższy. Pola narożne i ich sąsiedzi, oznaczone symbolami $\circ$ na rysunku obok, muszą zostać ozdobione w jedyny możliwy sposób. Ozdobienie każdego z pól oznaczonego $\spadesuit$ skutkuje ozdobieniem pola oznaczonego $\clubsuit$, zatem te trzy pola muszą być ozdobione jednocześnie. Analogicznie trzy pola oznaczone $\heartsuit$ muszą być ozdobione jednocześnie. Nie ma zatem sposobu, by ozdobić pole oznaczone $\diamondsuit$, sprzeczność.

W podobny, lecz dużo bardziej skomplikowany sposób możemy wykluczyć $n = 8$. Powstrzymamy się od tego, bo za chwilę podamy ogólniejszy argument.

Krok 2. Co zaskakujące, istnieje rozwiązanie dla $n = 9$. Jego konstrukcja nie jest jednak oczywista.



RYСУNEK 1. Oznaczenia pól dla $n = 2, 3, 5, 6$.

RYSUNEK 2. Oznaczenia pól i rozwiązanie dla $n = 9$.

Zacznijmy od wybrania pól w analogiczny sposób, jak w przypadku $n = 5$. W ten sposób oznaczonych jest 15 pól, z których każde musi zostać ozdobione osobno. Ponieważ wszystkich pól jest 45, każde odbicie pieczątki musi ozdobić oznaczone pole. Z tą wiedzą dużo łatwiej skonstruować rozwiązanie.

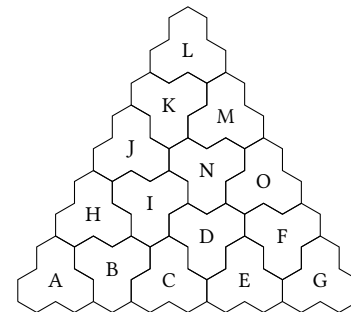
Nietrudno do powyższego diagramu dokleić poprawnie ozdobiony pasek szerokości 2 lub 3, uzyskując rozwiązania dla $n = 11$ oraz $n = 12$. W analogiczny sposób z rozwiązania dla $n = 12$ uzyskuje się rozwiązanie dla $n = 14$. Równie łatwo dokładać paski szerokości 12. Udowodniliśmy zatem istnienie rozwiązania dla wszystkich n , które dają resztę z dzielenia przez 12 równą 0, 2, 9 lub 11.

Krok 3. Okazuje się, że właśnie taka jest ostateczna odpowiedź do nowego zadania. Udowodnili to po raz pierwszy J. H. Conway oraz J. C. Lagarias w 1990. Poniżej przedstawiamy ich argument w nieco prostszej wersji, pochodzący od Jamesa Proppa.

Przypuśćmy, że planszę rozmiaru n da się ozdobić zgodnie z wymaganiami Jasia. Powiększmy każde trójkątne pole do sześciokąta, tak, aby plansza przypominała plaster miodu. Następnie posklejajmy wszystkie układy trzech sześciokątnych pól, które zostały ozdobione jednym odbiciem pieczątki. W ten sposób plansza zostaje wypełniona układami złożonymi z trzech sklejonych ze sobą sześciokątów. Są przy tym układy dwóch typów: jeden pochodzi od pieczątek o kształcie przypominającym trójkąt, drugi zaś — od tych przypominających sześciokąt. Dla uproszczenia będziemy mówić o pieczawkach trójkątnych i sześciokątnych.

Będziemy rozważać ścieżki, czyli łamane, których kolejne wierzchołki są sąsiadującymi ze sobą wierzchołkami sześciokątnych pól. W każdym wierzchołku ścieżka może skręcić w lewo lub w prawo albo zawrócić. Zakładamy, że ścieżki zaczynają się z wierzchołku typu (z którego wychodzą krawędzie w górę, w prawo w dół i w lewo w dół) i mają parzystą długość. Każdej takiej ścieżce przyporządkowujemy jej *cień*, określony następująco. Skręty cienia o numerach parzystych są w tę samą stronę, co w oryginalnej ścieżce, a skręty o numerach nieparzystych — w przeciwną; jeśli zaś ścieżka zawraca, to cień również zawraca.

Bezpośrednio sprawdzamy, że jeśli ścieżka obiega układ trzech pól pochodzących od trójkątnej pieczątki, to jej cień ma ten sam kształt, obiega w tę samą stronę. Z kolei jeśli oryginalna ścieżka obiega układ trzech pól pochodzących od sześciokątnej pieczątki, to jej cień też ma ten sam kształt, ale obiega w przeciwną stronę. Dość jasne jest też, że ścieżkę obiegującą kilka układów można uzyskać przez sklejenie ścieżek obiegujących pojedyncze układy (i ewentualne usunięcie nawrotów). Nieco trudniej sprawdzić, że cień takiej połączonej ścieżki można równie dobrze uzyskać przez połączenie cieni poszczególnych fragmentów (i ewentualne usunięcie nawrotów). Pomijamy szczegóły, które dużo wygodniej byłoby wyrazić w języku teorii grup.

RYSUNEK 3. Ramki w przykładowym rozwiązaniu dla $n = 9$.

Przypuśćmy, że całą planszę można wypełnić układami pochodzącymi od dwóch pieczętek Jasia. Rozważmy ścieżkę obiegającą lewoskrętnie całą planszę. Na mocy obserwacji poczynionej powyżej, cień tej ścieżki wraca do punktu startowego. Niech p oznacza liczbę układów pochodzących od trójkątnej pieczętki, zaś q — tych pochodzących od pieczętki sześciokątnej. Oczywiście $3p + 3q = \frac{1}{2}n(n+1)$ jest liczbą pól. Ponadto każdy z $p + q$ układów jest obiegany przez naszą ścieżkę dokładnie raz, lewoskrętnie. Cień naszej ścieżki jest połączeniem cieni ścieżek obiegających poszczególne układy. Na mocy uwagi z poprzedniego akapitu jeśli dla każdego sześciokątnego pola obliczymy, ile razy cień naszej ścieżki obiega to pole lewoskrętnie (licząc obiegnięcia w prawo ze znakiem minus), a następnie wysumujemy uzyskane liczby, otrzymamy $3p - 3q$; jest to *niezmiennik Conwaya–Lagarias*. Z drugiej strony cień naszej ścieżki możemy wyznaczyć bezpośrednio: obiega on wyłącznie trzy pola, każde z nich $\lceil \frac{1}{3}n \rceil$ razy. Oznacza to, że $3p + 3q = \frac{1}{2}n(n+1)$ oraz $3p - 3q = 3\lceil \frac{1}{3}n \rceil$. Pozostaje zauważyć, że skoro liczby te mają tę samą parzystość, to resztą z dzielenia n przez 12 nie może być żadna z liczb 3, 5, 6 oraz 8.

Reszty 1, 4, 7 oraz 10 wykluczyliśmy na samym początku. Z kolei jeśli n daje resztę 0, 2, 9 lub 11, w pierwszej części rozwiązania wykazaliśmy, że planszę w istocie da się ozdobić. To kończy rozwiązanie nowego zadania.

Udowodniliśmy więc, że rozwiązanie oryginalnego problemu Jasia na planszy rozmiaru n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 12. $\square$



ZADANIE 2. Niech:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4).$$

Liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 spełniają warunek $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$ i mają następującą własność: jeśli $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, to

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \leq F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Wyznacz wartość $F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Rozwiązanie: Krok 1. Niech $P(x) = x^2 - x^4$. Wtedy:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) + P(x_5).$$

Ustalmy liczbę rzeczywistą m i rozważmy funkcję:

$$\begin{aligned} f(t) &= P(m+t) + P(m-t) = \\ &= (m+t)^2 + (m-t)^2 - (m+t)^4 - (m-t)^4 = \\ &= 2(m^2 - m^4) + 2(1 - 6m^2)t^2 - 2t^4. \end{aligned}$$

Po podstawieniu $t^2 = s$ otrzymujemy funkcję kwadratową, która osiąga wartość największą dla s równego $s_0 = \frac{1}{2}(1 - 6m^2)$ i jest malejąca na przedziale $[s_0, \infty)$. W takim razie jeśli $s_0 \leq 0$, to f osiąga wartość największą, gdy $t = 0$. Z kolei gdy $s_0 > 0$, to f przyjmuje wartość największą dla $t = \pm\sqrt{s_0}$. W obu przypadkach wartość największa jest osiągana tylko wtedy, gdy $t = \pm t_0$, gdzie:

$$t_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - 6m^2}{2}} & \text{gdy } 1 - 6m^2 > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Krok 2. Dla liczb a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 z zadania określmy $m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ oraz $t = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)$. Wtedy $a_1 = m + t$ oraz $a_2 = m - t$. Niech f oraz t_0 będą określone jak wyżej i niech:

$$x_1 = m + t_0, \quad x_2 = m - t_0, \quad x_3 = a_3, \quad x_4 = a_4, \quad x_5 = a_5.$$

Skoro $x_1 + x_2 = 2m = a_1 + a_2$, mamy:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.$$

Z założeń zadania wynika, że:

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\ &= P(a_1) + P(a_2) - P(x_1) - P(x_2) = \\ &= P(m+t) + P(m-t) - P(m+t_0) - P(m-t_0) = \\ &= f(t) - f(t_0), \end{aligned}$$

czyli $f(t) \geq f(t_0)$. W pierwszym kroku wykazaliśmy, że $f(t) \leq f(t_0)$, a więc $f(t) = f(t_0)$. Również w pierwszym kroku zauważyliśmy, że równość ta oznacza, że $t = \pm t_0$. Rozważmy dwa przypadki.

- Jeśli $1 - 6m^2 \leq 0$, to $t_0 = 0$ i wobec tego $a_1 = a_2$.
- Jeśli $1 - 6m^2 < 0$, to:

$$t^2 - t_0^2 = t^2 - \frac{1 - 6m^2}{2} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} - \frac{2 - 3(a_1 + a_2)^2}{4} = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 - \frac{1}{2},$$

a więc warunek $t = \pm t_0$ przyjmuje postać $a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 = \frac{1}{2}$. Stąd $|a_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} - a_1^2}. \quad (1)$$

Podsumowując: albo $a_1 = a_2$, albo zachodzi (1).

Krok 3. Tak samo dowodzimy analogicznych związków między dowolnymi dwoma wyrazami ciągu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . W ciągu tym występują zatem co najwyżej trzy wartości, przy czym jeśli jedną z nich jest a , to pozostałe muszą być postaci $-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}$. Jest pięć możliwości.

- Wszystkie wyrazy ciągu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 są równe. Wtedy $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ oraz:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F(0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

- Cztery wyrazy są równe a , a jeden $-4a$. Wtedy:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F(a, a, a, a, -4a) = 20a^2 - 260a^4 = 20a^2(1 - 13a^2).$$

Z nierówności między średnimi, $13a^2(1 - 13a^2) \leq \frac{1}{4}$, zatem:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \leq \frac{5}{13}.$$

- Trzy wyrazy są równe a , a pozostałe dwa $-\frac{3}{2}a$. Wtedy:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F(a, a, a, -\frac{3}{2}a, -\frac{3}{2}a) = \frac{15}{2}a^2 - \frac{105}{8}a^4 = \frac{15}{2}a^2(1 - \frac{7}{4}a^2).$$

Z nierówności między średnimi $\frac{7}{4}a^2(1 - \frac{7}{4}a^2) \leq \frac{1}{4}$, zatem:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \leq \frac{15}{14},$$

z równością gdy $a = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

- Trzy wyrazy są równe a , jeden $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}$, ostatni zaś $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}$. Wtedy:

$$0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3a + (-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}) + (-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}) = 2a,$$

czyli $a = 0$. Otrzymujemy:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}.$$

- Jeden wyraz jest równy a , dwa są równe $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}$, kolejne dwa $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}$. Wtedy:

$$0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a + 2(-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}) + 2(-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2} - a^2}) = -a,$$

czyli $a = 0$ oraz:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1.$$

W każdym przypadku wartość $F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ jest nie większa niż $\frac{15}{14}$, zaś wartość tę uzyskujemy, biorąc $a_1 = a_2 = -\frac{3\sqrt{14}}{14}$ oraz $a_3 = a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{14}}{7}$. Odpowiedzią jest więc $\frac{15}{14}$. $\square$

Uwaga 1: Wykażemy niżej, że ciąg a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 z treści zadania jest poprawnie określony, tzn. funkcja F w istocie osiąga wartość największą (równą $\frac{15}{14}$) w zbiorze ciągów x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 spełniających warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ jest $\frac{15}{14}$.

Funkcja F jest ciągła, zatem – na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiągnięciu kresów – osiąga wartość największą w zbiorze opisanym warunkami $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ oraz dodatkowo $|x_i| \leq 2$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (jest to bowiem *domknięty* i *ograniczony* podzbiór $\mathbb{R}^5$). Ponadto wartość ta jest nie mniejsza niż $F(0, 0, 0, 0, 0) = 0$.

Ponieważ $x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) \leq \frac{1}{4}$ dla wszystkich wartości x oraz $x^2 - x^4 \leq -12$ gdy $|x| \geq 2$, to $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \leq -11$ gdy choć jeden z argumentów leży poza przedziałem $[-2, 2]$. Oznacza to, że opisana w poprzednim akapicie (nieujemna) wartość największa F jest w istocie wartością



największą F na zbiorze opisanym warunkiem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Innymi słowy funkcja F faktycznie osiąga w tym zbiorze wartość największą.

Uwaga 2: Rozwiązanie można uprościć, stosując metody rachunku różniczkowego, a ściślej *metodę mnożników Lagrange'a*. Pozwala ona nieco szybciej – i przede wszystkim w usystematyzowany sposób – uzyskać związek między a_1 i a_2 z kroku 2.

Uwaga 3: W analogiczny sposób można wyznaczyć wartość największą wyrażenia $\sum_{k=1}^n (|x_k|^p - |x_k|^q)$, gdzie $1 < p < q$, przy założeniu, że $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Wartość maksymalna jest osiągana, gdy ciąg x_k przyjmuje dwie wartości: jedną z nich $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ razy, drugą zaś $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ razy.

Gdy $p = 2$ oraz $q = 4$, dowód tego faktu jest bliźniaczo podobny do przedstawionego wyżej rozwiązania, wymaga jednak bardziej systematycznego przeglądu przypadków w ostatnim kroku. W przypadku ogólnych p oraz q krok 1 jest bardziej wymagający, szczegóły pomijamy.

ZADANIE 3. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , a proste AP , BP i CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D , E i F . Prosta BE przecina prostą DF w punkcie X . Załóżmy, że:

$$|\angle EDF| = |\angle ACX| = 90^\circ.$$

Udowodnij, że:

$$|\angle CFD| = |\angle CAD| + |\angle CBE|.$$

Rozwiązanie: Potrzebny nam będzie następujący pomocniczy wynik.

Lemat: Jeśli kąt przy wierzchołku P w trójkącie PQR jest prosty, punkty S oraz T są różnymi punktami na prostej QR oraz:

$$|QS| : |RS| = |QT| : |RT|,$$

to proste PQ i PR są dwusiecznymi kątów wyznaczonych przez proste PS i PT .

Dowód lematu: Zauważmy wprawdzie, że gdyby $S = Q$, to mielibyśmy $T = Q$, wbrew założeniu o tym, że $S \neq T$. Analogicznie dowodzimy, że żaden z punktów S, T nie pokrywa się z żadnym z punktów Q, R .

Niech S_1, S_2 oznaczają rzuty prostokątne punktu S odpowiednio na proste PQ i PR , zaś T_1, T_2 — rzuty prostokątne T na te same proste. Pola trójkątów PQS oraz PRS są równe odpowiednio $\frac{1}{2}|PQ| \cdot |SS_1|$ oraz $\frac{1}{2}|PR| \cdot |SS_2|$, a jednocześnie pozostają w stosunku $|QS| : |RS|$. Analogicznie pola trójkątów PQT oraz PRT są równe odpowiednio $\frac{1}{2}|PQ| \cdot |TT_1|$ oraz $\frac{1}{2}|PR| \cdot |TT_2|$, a jednocześnie pozostają w stosunku $|QT| : |RT|$. Stąd:

$$1 = \frac{|QS| \cdot |RT|}{|QT| \cdot |RS|} = \frac{|PQ| \cdot |SS_1| \cdot |PR| \cdot |TT_2|}{|PR| \cdot |SS_2| \cdot |PQ| \cdot |TT_1|} = \frac{|SS_1| \cdot |TT_2|}{|SS_2| \cdot |TT_1|}.$$

W takim razie prostokąty PS_1SS_2 oraz PT_1TT_2 są podobne. Skoro leżą one w dwóch sąsiadujących kątach wyznaczonych przez proste PQ i PR (ze względu na założenie lematu), proste PS i PT zawierające przekątne tych prostokątów są do siebie symetryczne zarówno względem prostej PQ , jak i prostej PS . $\square$

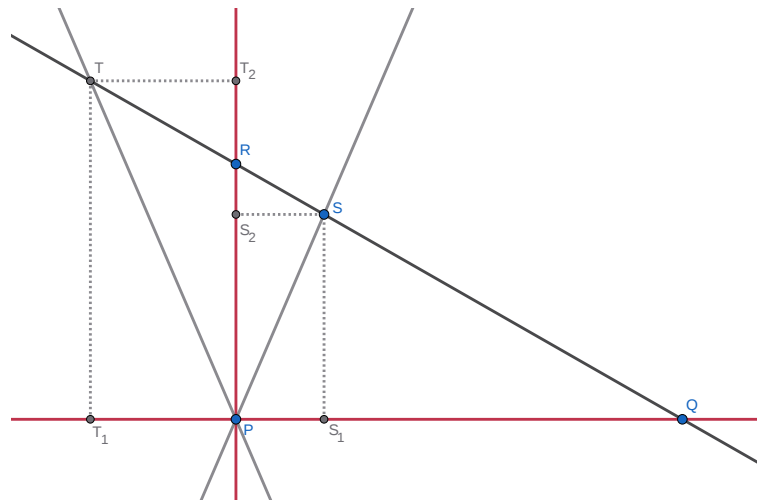
Wróćmy do naszego zadania. Zauważmy, że $|\angle AED| > |\angle ACD| > 90^\circ$, więc $|\angle AED| + |\angle EDF| > 180^\circ$. W takim razie proste AC oraz DF nie są równoległe i przecinają się w punkcie Y , leżącym na półprostej AC .

Z twierdzenia Cevy zastosowanego do trójkąta ABC i punktu P mamy:

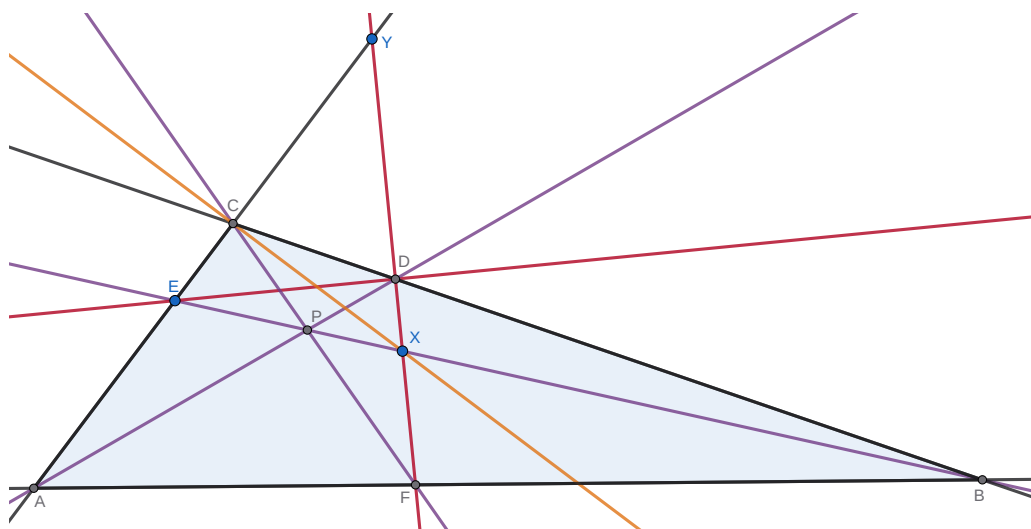
$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CE| = |BF| \cdot |CD| \cdot |AE|.$$

Z kolei z twierdzenia Menelaosa zastosowanego do trójkąta ABC i prostej DF otrzymujemy:

$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CY| = |BF| \cdot |CD| \cdot |AY|.$$



RYSUNEK 4. Ilustracja do dowodu lematu



RYSUNEK 5. Ilustracja do rozwiązywania zadania

W takim razie:

$$|CE| : |CY| = |AE| : |AY|.$$

Zastosujemy lemat do trójkąta DEY (mającego, na mocy założenia, kąt prosty przy wierzchołku D) oraz punktów A i C . Wnioskujemy, że prosta EF jest dwusieczną kąta między prostymi AD oraz CD .

Niech Q będzie spodkiem wysokości trójkąta EXY poprowadzonej z wierzchołka Y . Wtedy trójkąty EXY , DQX , DCY oraz ECQ są podobne. W istocie: trójkąty prostokątne CXY oraz DEY są podobne, więc $|CY| : |DY| = |XY| : |EY|$, a to oznacza podobieństwo trójkątów DCY oraz EXY . Podobieństwa pozostałych trójkątów i trójkąta EXY dowodzi się analogicznie.

Z podobieństwa trójkątów DQX oraz DCY wynika, że $|\angle EDQ| = |\angle EDC| = |\angle EDP|$, a to z kolei oznacza, że $P = Q$. W takim razie trójkąty EXY , DPX , DCY oraz ECP są podobne. Ostatecznie otrzymujemy:

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADF| - |\sphericalangle AYF| = |\sphericalangle XEY| - |\sphericalangle EYX|,$$

$$|\angle CBE| = |\angle BCY| - |\angle BEY| = |\angle EXY| - |\angle XEY|,$$

$$|\triangleleft CFD| = |\triangleleft ACF| - |\triangleleft A Y F| = |\triangleleft E X Y| - |\triangleleft E Y X|,$$

a więc $|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle CBE|$, zgodnie z tezą zadania.

Uwaga: Punkty Q, R, S, T spełniające warunek $|QS| : |RS| = |QT| : |RT|$ z lematu nazywa się *harmonicznie sprzężonymi*. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne do lematu: proste prostopadłe oraz dwusieczne kątów przez nie wyznaczonych przecinają dowolną prostą w punktach harmonicznie sprzężonych.

W rozwiązaniu udowodniliśmy w istocie następujące znane twierdzenie z geometrii rzutowej o czworokątach zupełnych: jeśli P oraz Q są punktami przecięcia odpowiednio prostych AB i CD oraz AD i BC , zaś X oraz Y są punktami przecięcia odpowiednio prostych AC i XY oraz BD i XY , to punkty P, Q, X, Y są harmonicznymi sprzężone. Rolę punktów A, B, C, D pełnią w powyższym rozwiązaniu punkty B, D, P, F , a dowód wykorzystuje wyłącznie twierdzenia Cevy i Menelaosa.



ZADANIE 4. Niech r_n oznacza resztę z dzielenia liczby n^{n^n} przez 67. Udowodnij, że istnieją dodatnie liczby całkowite N oraz T , takie że $r_{n+T} = r_n$ dla $n \geq N$.

Rozwiązanie: Powiemy, że ciąg liczb całkowitych a_n jest od pewnego miejsca okresowy modulo d , jeśli istnieją dodatnie liczby całkowite N oraz T takie, że:

$$a_{n+T} \equiv a_n \pmod{d} \quad \text{dla } n \geq N.$$

W tym przypadku wartość T nazywamy okresem modulo d , a wartość N — początkiem okresowości. Naszym celem jest udowodnienie, że ciąg n^{n^n} jest od pewnego miejsca okresowy modulo 67. Potrzebujemy do tego dwóch wyników pomocniczych.

Lemat 1: Jeśli d_1 i d_2 są względnie pierwsze, zaś ciąg a_n o wyrazach całkowitych jest od pewnego miejsca okresowy modulo d_1 i d_2 , to ciąg a_n jest od pewnego miejsca okresowy modulo $d_1 d_2$.

Dowód lematu: Oznaczmy okresy i początki okresowości modulo d_1 oraz d_2 przez odpowiednio T_1 i N_1 oraz T_2 i N_2 . Niech $N = \max\{N_1, N_2\}$ oraz $T = \text{NWW}(T_1, T_2)$. Gdy $n \geq N$, to obie liczby d_1 i d_2 dzielą $a_{n+T} - a_n$, więc również ich iloczyn $d_1 d_2$ dzieli tę liczbę. $\square$

Lemat 2: Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą, ciąg a_n o wyrazach całkowitych jest od pewnego miejsca okresowy modulo p , zaś ciąg b_n o wyrazach całkowitych dodatnich jest rosnący i od pewnego miejsca okresowy modulo $p - 1$. Wtedy ciąg $(a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo p .

Dowód lematu: Oznaczmy przez T_1 i N_1 oraz T_2 i N_2 okresy i początki okresowości odpowiednio ciągu a_n modulo p oraz ciągu b_n modulo $p - 1$. Określmy $N = \max\{N_1, N_2\}$ oraz $T = \text{NWW}(T_1, T_2)$. Gdy $n \geq N$, to z założenia:

$$a_n \equiv a_{n+T} \pmod{p},$$

a więc:

$$(a_n)^{b_n} \equiv (a_{n+T})^{b_n} \pmod{p}.$$

Jeśli p nie dzieli a_{n+T} , to na mocy małego twierdzenia Fermata mamy:

$$(a_{n+T})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Skoro $p - 1$ dzieli $b_{n+T} - b_n$ oraz $b_{n+T} \geq b_n$, to $b_{n+T} - b_n = (p - 1)m$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej m . Otrzymujemy więc:

$$(a_{n+T})^{b_{n+T} - b_n} = ((a_{n+T})^{p-1})^m \equiv 1^m = 1 \pmod{p}$$

i ostatecznie:

$$(a_n)^{b_n} \equiv (a_{n+T})^{b_n} \equiv (a_{n+T})^{b_n} (a_{n+T})^{b_{n+T} - b_n} = (a_{n+T})^{b_{n+T}} \pmod{p}.$$

Jeśli zaś p dzieli a_{n+T} , to oczywiście p dzieli też a_n , więc skoro $b_{n+T} \geq b_n \geq 1$, to:

$$(a_n)^{b_n} \equiv (a_{n+T})^{b_{n+T}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zatem faktycznie ciąg $(a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo p . $\square$

Wróćmy do rozwiązania naszego zadania. Kolejno upraszczamy nasze zagadnienie, wykorzystując powyższe dwa lematy.

- Stosujemy lemat 2 do ciągów $a_n = n$ oraz $b_n = n^n$. Ciąg a_n jest oczywiście okresowy modulo 67, zaś ciąg b_n ma wyrazy dodatnie i jest rosnący. Niżej wykazemy, że ciąg $b_n = n^n$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo 66. Na mocy lematu 2 oznacza to, że ciąg $n^{n^n} = (a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo 67, tak, jak chcieliśmy.

- Niżej wykazujemy, że ciąg n^n jest od pewnego miejsca okresowy modulo 2, 3 oraz 11. Na mocy lematu 1 oznacza to, że jest on od pewnego miejsca okresowy modulo $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
- Powtarzając rozumowanie z poprzednich dwóch punktów dla ciągów $a_n = n$ oraz $b_n = n^n$, wnioskujemy, że ciąg $n^{n^n} = (a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo 11, jeśli ciąg $b_n = n^n$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo $10 = 2 \cdot 5$, a więc modulo 2 oraz 5.
- Zupełnie analogicznie ciąg n^{n^n} jest od pewnego miejsca okresowy modulo 3, jeśli ciąg n^n jest od pewnego miejsca okresowy modulo 2.
- Stosując ten sam argument dla ciągów $a_n = n$ oraz $b_n = n$, wnioskujemy, że ciąg $n^n = (a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo 5, jeśli ciąg $b_n = n$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo 4.

Zauważmy jednak, że wyrazy ciągów n^n oraz n^{n^n} są na przemian nieparzyste i parzyste, a więc ciągi te są okresowe modulo 2. Ponadto ciąg n jest oczywiście okresowy modulo 4. Na podstawie poczynionych wyżej obserwacji dowodzi to tezy zadania. $\square$

Uwaga 1: Ciekawym pytaniem jest wartość okresu podstawowego $T_{4,67}$ ciągu reszt z dzielenia liczb $n^{n^{n^n}}$ przez 67, po pominięciu odpowiednio wielu początkowych wyrazów. Przedstawione wyżej rozwiązanie prowadzi do wniosku, że jeśli $T_{h,d}$ jest analogicznym okresem podstawowym modulo d ciągu $n^{n^{\dots n}}$ z wieżą potęg wysokości h , to $T_{h,2} = 2$, $T_{1,d} = d$ oraz:

$$\begin{aligned} T_{3,3} &| \text{NWW}(T_{1,3}, T_{2,2}) = \text{NWW}(3, 2) = 6; \\ T_{2,5} &| \text{NWW}(T_{1,5}, T_{1,4}) = \text{NWW}(5, 4) = 20; \\ T_{3,11} &| \text{NWW}(T_{1,11}, T_{2,2}, T_{2,5}) | \text{NWW}(11, 2, 20) = 220; \\ T_{4,67} &| \text{NWW}(T_{1,67}, T_{3,2}, T_{3,3}, T_{3,11}) | \text{NWW}(67, 2, 6, 220) = 44220. \end{aligned}$$

Można bezpośrednim rachunkiem sprawdzić, że w istocie $T_{4,67} = 44220$. $\square$

Uwaga 2: Prawdziwe jest ogólniejsze twierdzenie: ciągi postaci $n^{n^{\dots n}}$, gdzie wieża potęg ma ustaloną wysokość h , są od pewnego miejsca okresowe modulo d dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej d .

Dowód powyższego faktu wykorzystuje następujące uogólnienie lematu 2. Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś k dodatnią liczbą całkowitą. Jeśli ciąg a_n jest od pewnego miejsca okresowy modulo p^k , zaś ciąg b_n jest rosnący i od pewnego miejsca okresowy modulo $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$, to ciąg $(a_n)^{b_n}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo p^k . Uzasadnienie różni się tylko nieznacznie od dowodu lematu 2: zamiast małego twierdzenia Fermata należy wykorzystać twierdzenie Eulera, zaś w ostatniej części należy zauważyć, że $b_n \geq k$ jeśli $n \geq k$ (zatem tym razem $N = \max\{N_1, N_2, k\}$).

Przypuśćmy, że postawiona wyżej teza jest fałszywa i rozważmy najmniejszą liczbę d spośród tych, dla których pewien ciąg postaci $n^{n^{\dots n}}$, z wieżą potęg wysokości h , nie jest od pewnego miejsca okresowy modulo d . Na mocy lematu 1 ciąg a_n nie jest od pewnego miejsca okresowy modulo p^k dla pewnego czynnika pierwszego p liczby d i największego wykładnika k dla którego p^k dzieli d . Z minimalności d wynika więc, że $d = p^k$. Ponieważ ciąg $a_n = n$ jest okresowy modulo p^k , z pewnością $h \geq 2$. Z kolei ciąg $b_n = n^{n^{\dots n}}$, gdzie wieża potęg ma wysokość $h-1$, jest dodatni i rosnący, a skoro $\varphi(p^k) < p^k = d$, z minimalności d wynika, że b_n jest od pewnego miejsca okresowy modulo $\varphi(p^k)$. Uzyskujemy zatem sprzeczność z powyższym uogólnieniem lematu 2 i dowód jest zakończony. $\square$

Uwaga 3: Ciąg $n^{n^{\dots n}}$, gdzie wieża potęg ma wysokość n , również jest od pewnego miejsca okresowy modulo d dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej d .

Dowód wykorzystuje niemal identyczny argument. Przypuśćmy, że d jest najmniejszą liczbą, dla której istnieje nieujemna liczba całkowita c , taka że ciąg $x_n^{(c)} = (n+c)^{(n+c)^{\dots n+c}}$, gdzie wieża potęg ma wysokość n , nie jest od pewnego miejsca okresowy modulo d . Z lematu 1 znów wynika, że $d = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p , zaś minimalność d oznacza, że ciąg $x_n^{(c+1)}$ jest od pewnego miejsca okresowy modulo $\varphi(d)$. W takim razie z równości $x_{n+1}^{(c)} = (n+c+1)^{x_n^{(c+1)}}$ uzyskujemy sprzeczność z opisanym w poprzedniej uwadze uogólnieniem lematu 2. $\square$



ZADANIE 5. Małgosia ma wypukły wielościan, którego jedna ściana jest czworokątem, a wszystkie pozostałe są trójkątami. Małgosia sprawdziła, że może pokolorować każdą krawędź swojej bryły na amarantowo, bordowo lub cynobrowo w taki sposób, aby każdy trójkąt utworzony z tych krawędzi miał boki trzech różnych kolorów.

Jaś bardzo nie lubi czworokątów. Poprosił więc Marysię o dorysowanie jednej z przekątnych czworokątnej ściany, która podzieli ją na dwa trójkąty. Czy Małgosia może spełnić życzenie Jasia, a potem pokolorować wszystkie krawędzie swojego wielościanu oraz dorysowaną przekątną w taki sposób, aby każdy trójkąt na powierzchni bryły miał boki trzech różnych kolorów?

Rozwiązanie: Oznaczmy kolory symbolami a, b, c i rozważmy poprawne kolorowanie wielościanu Małgosi (tj. takie, o jakim mowa w treści zadania). Węzem gatunku ab nazwiemy ciąg parami różnych ścian trójkątnych, którego kolejne wyrazy są ścianami sąsiadującymi ze sobą krawędzią koloru a lub b . Zauważmy, że takiego węza możemy w jednoznaczny sposób wydłużać aż do momentu, gdy jego pierwsza i ostatnia ściana będą sąsiadowały krawędzią koloru a lub b albo ze sobą, albo ze ścianą czworokątną. Takiego węza nazwiemy *maksymalnym*. Każda krawędź koloru a lub b , a także każda trójkątna ściana wielościanu Małgosi, są częściami wyznaczonych jednoznacznie maksymalnych węży gatunku ab , a każde dwa maksymalne węże gatunku ab są rozłączne (tj. składają się z parami różnych ścian).

Maksymalnego węza gatunku ab możemy *przemaalować*, zamieniając kolory a i b wszystkich krawędzi w tym wężu. Zauważmy, że takie przemaalowanie zamienia kolory dwóch krawędzi każdej ściany należącej do węza i nie zmienia kolorów krawędzi pozostałych ścian, a więc po przemaalowaniu kolorowanie wielościanu jest wciąż poprawne.

W analogiczny sposób określamy węże i maksymalne węże gatunków ac i bc , a także ich przemaalowanie.

Rozważmy maksymalne węże gatunku ab wychodzące z krawędzi koloru a lub b czworokątnej ściany wielościanu Małgosi. Węże te łączą takie krawędzie w pary, a więc ściana czworokątna ma parzystą liczbę krawędzi koloru a lub b . W takim razie liczba krawędzi tej ściany koloru c też jest parzysta. Analogicznie krawędzi koloru a i krawędzi koloru b ściany czworokątnej też jest parzyście wiele.

Krawędzie czworokątnej ściany są zatem co najwyżej dwóch kolorów — niech będą nimi a i b — i są połączone w pary przez dwa maksymalne węże gatunku ab oparte o tę ścianę. Jeśli wszystkie te krawędzie są tego samego koloru, Małgosia może to zmienić, przemaalowując jeden z maksymalnych węży. Zatem bez utraty ogólności można przyjąć, że dwie krawędzie czworokątnej ściany są koloru a , zaś dwie pozostałe — koloru b . Niezależnie od ich konfiguracji co najmniej jedna z przekątnych czworokątnej ściany rozdziela krawędzie tego samego koloru. Jeśli Małgosia ją dorysuje i pokoloruje na kolor c , otrzyma poprawne kolorowanie zmienionego wielościanu. Wobec tego odpowiedź na pytanie z zadania jest twierdząca.

Uwaga 1: Inspiracją do powyższego zadania był jeden z problemów zaproponowanych uczestnikom *1st International Mathematics Summer Camp* (IMSC 2024).

Uwaga 2: Rozważmy wielościan Małgosi po dorysowaniu *dowolnej* z przekątnych czworokątnej ściany. Na mocy twierdzenia o czterech barwach jego wierzchołki można pokolorować czterema kolorami p, q, r, s w taki sposób, by żadna krawędź nie łączyła wierzchołków tego samego koloru. Następnie wszystkie krawędzie łączące wierzchołki kolorów p i q albo kolorów r i s pokolorujemy na kolor a . Analogicznie krawędzie łączące wierzchołki kolorów p i r albo q i s pokolorujemy na kolor b , a te łączące wierzchołki kolorów p i s albo q i r — na kolor c . Łatwo sprawdzić, że uzyskujemy w ten sposób poprawne kolorowanie wielościanu Małgosi. Oznacza to, że Marysia *zawsze* może poprawnie pokolorować swoją bryłę.

Uwaga 3: Pierwotna wersja tego zadania zawierała błąd, który wkradł się w czasie ostatecznej redakcji treści: to Jaś dowolnie wybierał dorysowaną przekątną. Poprzednia uwaga dowodzi, że tak zmienione zadanie ma tę samą odpowiedź, i to nawet bez założenia o możliwości pokolorowania wielościanu Małgosi przed dorysowaniem przekątnej.

Okazuje się, że ta pierwotna wersja zadania jest *bardzo* trudna: nie jest znane rozwiązanie, które nie wykorzystywałoby twierdzenia o czterech barwach. Ściślej: pierwotna wersja zadania pozwala w stosunkowo prosty sposób udowodnić twierdzenie o czterech barwach dla wielościanów wypukłych. Naszkicujemy to uzasadnienie.

Założmy, że odpowiedź na pierwotną wersję zadania jest twierdząca. Rozważmy wielościan wypukły o trójkątnych ścianach, którego wierzchołki można pokolorować przy pomocy czterech barw tak, aby żadna krawędź nie łączyła wierzchołków tego samego koloru. Usuńmy dowolną krawędź tej bryły, łącząc w ten sposób dwie ściany zawierające tę krawędź w „niepłaski czworokąt”. Przesuwając nieco wierzchołki otrzymamy wielościan Małgosi, którego krawędzie — na mocy poprzedniej uwagi — można pokolorować zgodnie z wymaganiami zadania.

Niech Jaś dorysuje teraz przekątną czworokątnej ściany inną niż usunięta krawędź. Na mocy pierwotnej wersji zadania Małgosi wciąż może poprawnie pokolorować krawędzie nowego wielościanu. Pokolorujmy dowolnie wybrany wierzchołek nowego wielościanu kolorem p , a następnie kolorujmy kolejno wierzchołki połączone krawędziami z już pokolorowanymi wierzchołkami w taki sposób, aby spełnione były zależności opisane w poprzedniej uwadze: krawędzie koloru a łączyły wierzchołki kolorów p, q albo r, s itd. Można wykazać, że ta procedura faktycznie działa; nie jest to szczególnie trudne, ale wymaga starannego dowodu. W ten sposób wnioskujemy, że wierzchołki zmienionego wielościanu można pokolorować przy pomocy czterech barw tak, aby żadna krawędź nie łączyła wierzchołków tego samego koloru.

Zauważmy, że wierzchołki dowolnego ostrosłupa można łatwo pokolorować przy pomocy czterech barw tak, aby żadna krawędź nie łączyła wierzchołków tego samego koloru. Własność ta nie zmieni się, jeśli wykonamy opisaną wyżej operację: usuniemy wybraną krawędź i przesuniemy nieco wierzchołki, tworząc czworokątną ścianę, a następnie dodamy drugą przekątną tej ściany. Dowodzi się, że wykonując w odpowiedni sposób te operacje, możemy ostrosłup przekształcić w dowolną bryłę wypukłą o trójkątnych ścianach (z dokładnością do przesunięcia wierzchołków). To zaś oznacza, że wierzchołki dowolnego wielościanu wypukłego o trójkątnych ścianach można pokolorować przy pomocy czterech barw.



ZADANIE 6. Kula Ω jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$. Niech a, b, c, d oznaczają długości odcinków stycznych do Ω poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C, D . Udowodnij, że środek kuli Ω należy do czworościanu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{d}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{a}.$$

Rozwiązanie: Niech O będzie środkiem kuli Ω , r – promieniem Ω , zaś I_A, I_B, I_C, I_D oraz r_A, r_B, r_C, r_D – środkami i promieniami kół $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ wpisanych odpowiednio w trójkąty BCD, ACD, ABD, ABC .

Zauważmy, że część wspólna kuli Ω z trójkątem ABC jest kołem, które ma jeden punkt wspólny z każdym bokiem tego trójkąta. Jest to więc koło ω_D . Analogicznie części wspólne kuli Ω i pozostałych ścian są odpowiednio kołami $\omega_A, \omega_B, \omega_C$.

Plan dowodu jest następujący. W pierwszym kroku wyrazimy tezę zadania przy pomocy odległości między wierzchołkami A, B, C, D , odpowiadającymi im punktami I_A, I_B, I_C, I_D oraz punktem O . Następnie wyznaczmy długość $|DI_D|$. W kroku trzecim wyrazimy ją oraz długości $|DO|, |OI_D|$ przy pomocy a, b, c, d . Ostatnim krokiem będzie badanie trójkąta DOI_D .

Krok 1. Zbiór punktów równo oddalonych od punktów styczności kuli Ω z krawędziami AB, AC, AD tworzy prostą ℓ prostopadłą do płaszczyzny ABC . Prosta ta zawiera punkty O oraz I_D . Niech D' będzie rzutem prostokątnym D na prostą ℓ . Jeśli punkt O leży we wnętrzu czworościanu $ABCD$, to punkty D', O, I_D leżą w tej kolejności na prostej ℓ , a więc kąt $\angle DI_D O$ jest ostry. Jeśli zaś punkt O leży po przeciwnej stronie płaszczyzny ABC niż punkt D , to punkty D', I_D, O leżą w tej kolejności na prostej ℓ i analogicznie kąt $\angle DI_D O$ jest rozwarty. Wreszcie jeśli D leży na płaszczyźnie ABC , to $O = I_D$.

Jeśli punkt O nie leży w czworościanie $ABCD$, to znajduje się po przeciwnej stronie płaszczyzny pewnej ściany niż wierzchołek do tej ściany przeciwległy. Zatem nasze zagadnienie sprowadza się do badania rozwartości kątów w trójkątach AOI_A, BOI_B, COI_C oraz DOI_D .

Krok 2. Oznaczmy:

$$\alpha = \frac{|BC|}{|AB| + |AC| + |BC|}, \quad \beta = \frac{|AC|}{|AB| + |AC| + |BC|}, \quad \gamma = \frac{|AB|}{|AB| + |AC| + |BC|}.$$

Oczywiście $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Twierdzymy, że:

$$\vec{DI_D} = \alpha \cdot \vec{DA} + \beta \cdot \vec{DB} + \gamma \cdot \vec{DC}, \quad (2)$$

tzn. α, β, γ są współrzędnymi barycentrycznymi punktu I_D w trójkącie ABC . W istocie: niech J oznacza punkt D przesunięty o wektor $\alpha \cdot \vec{DA} + \beta \cdot \vec{DB} + \gamma \cdot \vec{DC}$. Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 1$, punkt J leży w płaszczyźnie trójkąta ABC . Z twierdzenia Talesa wynika, że odległość J od prostej BC jest równa αh , gdzie h oznacza odległość punktu A od prostej BC , tzn. długość wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A . Jeśli oznaczymy przez $|ABC|$ pole trójkąta ABC , to oczywiście:

$$\frac{1}{2}|BC| \cdot h = |ABC| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| + |BC|) \cdot r_D,$$

skąd $\alpha h = r_D$. Zatem J jest odległy od prostej BC o r_D . Analogicznie odległość punktu J od prostych AC i AB jest równa r_D , czyli punkt ten pokrywa się z punktem I_D . Oczywiście:

$$\begin{aligned} |DI_D|^2 + \alpha|AI_D|^2 + \beta|BI_D|^2 + \gamma|CI_D|^2 &= \\ &= |\vec{DI_D}|^2 + \alpha|\vec{DI_D} - \vec{DA}|^2 + \beta|\vec{DI_D} - \vec{DB}|^2 + \gamma|\vec{DI_D} - \vec{DC}|^2. \end{aligned}$$

Obliczając długości przy pomocy iloczynu skalarnego, wymnażając nawiasy i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |DI_D|^2 + \alpha|AI_D|^2 + \beta|BI_D|^2 + \gamma|CI_D|^2 &= \\ &= (1 + \alpha + \beta + \gamma)|\vec{DI}_D|^2 - 2(\alpha \cdot \vec{DA} + \beta \cdot \vec{DB} + \gamma \cdot \vec{DC}) \circ \vec{DI}_D + \alpha|AD|^2 + \beta|BD|^2 + \gamma|CD|^2. \end{aligned}$$

Wykorzystując (2) oraz równość $\alpha + \beta + \gamma = 1$, dochodzimy do wniosku, że:

$$\begin{aligned} |DI_D|^2 + \alpha|AI_D|^2 + \beta|BI_D|^2 + \gamma|CI_D|^2 &= \\ &= 2|\vec{DI}_D|^2 - 2\vec{DI}_D \circ \vec{DI}_D + \alpha|AD|^2 + \beta|BD|^2 + \gamma|CD|^2 = \\ &= \alpha|AD|^2 + \beta|BD|^2 + \gamma|CD|^2, \end{aligned}$$

czyli:

$$|DI_D|^2 = \alpha(|AD|^2 - |AI_D|^2) + \beta(|BD|^2 - |BI_D|^2) + \gamma(|CD|^2 - |CI_D|^2). \quad (3)$$

Krok 3. Wyrazimy wszystkie powyższe wielkości, a także $|DO|$ oraz $|OI_D|$, przy pomocy a, b, c, d oraz r . Niech X będzie punktem styczności kuli Ω z odcinkiem AD . Wtedy promień OX kuli Ω jest prostopadły do stycznej AD do tej kuli, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DXO mamy:

$$|DO|^2 = |DX|^2 + |OX|^2 = d^2 + r^2. \quad (4)$$

Oczywiście $|AD| = a + d$, $|BD| = b + d$, $|CD| = c + d$. Niech Y będzie punktem styczności kuli Ω z odcinkiem AB , czyli też punktem styczności koła ω_D z odcinkiem AB . Prosta ℓ , zawierająca O oraz I_D , jest prostopadła do odcinka YI_D , więc z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OYI_D mamy:

$$|OI_D|^2 = |OY|^2 - |YI_D|^2 = r^2 - r_D^2. \quad (5)$$

Z kolei promień YI_D koła ω_D jest prostopadły do stycznej AY do tego koła, więc z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AYI_D otrzymujemy:

$$|AI_D|^2 = |AY|^2 + |YI_D|^2 = a^2 + r_D^2.$$

Analogicznie $|BI_D|^2 = b^2 + r_D^2$ oraz $|CI_D|^2 = c^2 + r_D^2$. Na mocy tych wszystkich równości oraz (3):

$$|DI_D|^2 = \alpha((a + d)^2 - (a^2 + r_D^2)) + \beta((b + d)^2 - (b^2 + r_D^2)) + \gamma((c + d)^2 - (c^2 + r_D^2)).$$

Skoro $\alpha + \beta + \gamma = 1$, zachodzi:

$$|DI_D|^2 = d^2 - r_D^2 + 2d(\alpha a + \beta b + \gamma c).$$

Łącząc tę równość z (4) oraz (5), otrzymujemy:

$$|DI_D|^2 + |OI_D|^2 - |DO|^2 = 2d(\alpha a + \beta b + \gamma c) - 2r_D^2.$$

Z definicji α, β, γ mamy:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \frac{a(b + c) + b(a + c) + c(a + b)}{2(a + b + c)} = \frac{ab + ac + bc}{a + b + c},$$

dzięki czemu:

$$|DI_D|^2 + |OI_D|^2 - |DO|^2 = 2 \frac{abd + acd + bcd}{a + b + c} - 2r_D^2.$$

Promień r_D można wyznaczyć przy pomocy wzoru Herona:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(|AB| + |AC| + |BC|)^2 \cdot r_D^2 &= |ABC|^2 = \\ &= \frac{1}{16}(|AB| + |AC| + |BC|) \cdot (|AB| + |AC| - |BC|) \cdot \\ &\quad \cdot (|AB| - |AC| + |BC|) \cdot (-|AB| + |AC| + |BC|). \end{aligned}$$

Wyrażając tę równość przy pomocy a, b, c , otrzymujemy:

$$(a + b + c)^2 r_D^2 = (a + b + c)abc,$$

czyli:

$$r_D^2 = \frac{abc}{a + b + c}.$$

Pozwala nam to napisać:

$$|DI_D|^2 + |OI_D|^2 - |DO|^2 = 2 \frac{abd + acd + bcd}{a + b + c} - 2r_D^2 = 2 \frac{abd + acd + bcd - abc}{a + b + c}.$$

lub, równoważnie:

$$|DI_D|^2 + |OI_D|^2 - |DO|^2 = \frac{2abcd}{a + b + c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right). \quad (6)$$

Krok 4. Przypuśćmy, że punkt O leży we wnętrzu czworościanu $ABCD$. Z uwag poczynionych w kroku pierwszym wiemy, że wówczas kąt $\angle DI_D O$ jest ostry, a więc lewa strona równości (6) jest dodatnia. Stąd:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{d}.$$

Analogicznie dowodzi się nierówności $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} > \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > \frac{1}{b}$ oraz $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > \frac{1}{a}$.

Założmy teraz, że O leży poza czworościanem $ABCD$. Z obserwacji w pierwszym kroku wynika, że któryś z kątów $\angle AI_A O$, $\angle BI_B O$, $\angle CI_C O$, $\angle DI_D O$ jest wtedy rozwarty. Jeśli na przykład kąt $\angle DI_D O$ jest rozwarty, to lewa strona równości (6) jest ujemna, czyli tym razem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{d}.$$

Analogicznie rozważamy pozostałe przypadki.

Rozważmy wreszcie ostatnią możliwość, gdy punkt O leży na którejś ze ścian czworościanu $ABCD$. W pierwszym kroku zauważyliśmy wtedy, że O jest jednym z punktów I_A, I_B, I_C, I_D . Gdy $O = I_D$, to oczywiście lewa strona równości (6) jest równa zero, czyli:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}.$$

Analogicznie rozważamy pozostałe przypadki. □

Uwaga 1: O kuli K mówi się, że jest *półwpisana* w czworościan $ABCD$. Kula taka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki A, B, C, D są środkami czterech kul (o promieniach odpowiednio a, b, c, d), z których każde dwie są zewnętrznie styczne. Czworościany o tej własności nazywane są *czworościanami Crelle'a*.

Uwaga 2: Udowodnimy poniżej, że środek kuli K leży we wnętrzu czworościanu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona *zablokowana* przez krawędzie tego czworościanu, tzn. jeśli każde odpowiednie małe przesunięcie tej kuli przecina pewną krawędź czworościanu. Innymi słowy kula ta nie wypadnie ze sztywnej ramki utworzonej przez krawędzie czworościanu. Z przedstawionego wyżej rozwiązania wynika, że warunek ten jest równoważny ostrym nierównościami podanym w treści zadania:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{d}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{1}{a}.$$

Założmy wprawdzie, że punkt O leży poza wnętrzem czworościanu $ABCD$, np. po przeciwnej stronie ściany ABC niż wierzchołek D lub na ścianie ABC . Rozważmy obraz Ω' kuli Ω po przesunięciu jej w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ABC , w stronę przeciwną niż punkt D . Łatwo sprawdzić, że Ω' nie ma punktów wspólnych z krawędziami czworościanu $ABCD$: fragment Ω leżący poza Ω' zawiera bowiem w całości część brzegu Ω odciętą płaszczyzną ABC i leżącą po tej samej stronie tej płaszczyzny, co punkt D .



Założmy teraz, że punkt O leży we wnętrzu tego czworościanu i rozważmy obraz Ω' kuli Ω po przesunięciu jej w pewnym kierunku $\vec{v}$. Półprosta wychodząca z O w kierunku $\vec{v}$ przetnie którąś ze ścian czworościanu $ABCD$ — niech będzie nią trójkąt ABC . Oznacza to, że — o ile przesunięcie jest dostatecznie małe — część wspólna kuli Ω' i płaszczyzny ABC jest kołem ω'_D o większym promieniu, niż koło ω_D wpisane w trójkąt ABC (które jest częścią wspólną Ω i płaszczyzny ABC). Ponadto — znów, o ile przesunięcie jest wystarczająco małe — ω'_D zawiera środek I_D okręgu ω_D , a zatem nie leży poza trójkątem ABC . To zaś oznacza, że ω'_D zawiera fragment pewnego boku trójkąta ABC , czyli Ω' zawiera fragment pewnej krawędzi czworościanu $ABCD$. Udowodniliśmy więc, że Ω jest faktycznie zablokowana. $\square$

DODATEK: ZADANIE ODRZUCONE

ZADANIE 7. Dane są dodatnie liczby całkowite n, m . Przez $S_{n,m}$ oznaczmy liczbę ciągów $a_1, a_2, \dots, a_n$ o wyrazach całkowitych, spełniających nierówność:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq m.$$

Udowodnij, że $S_{n,m} = S_{m,n}$.

Rozwiązanie 1: Załóżmy, że $n, m \geq 2$. Ciągów $a_1, a_2, \dots, a_n$ takich, że $a_n \geq 0$ oraz:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = m$$

jest tyle, co ciągów $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ takich, że:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| \leq m,$$

czyli $S_{n-1,m}$. Analogicznie ciągów $a_1, a_2, \dots, a_n$ takich, że $a_n < 0$ oraz:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = m$$

jest tyle, co ciągów $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ takich, że:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| \leq m - 1,$$

czyli $S_{n-1,m-1}$. Wreszcie ciągów $a_1, a_2, \dots, a_n$ takich, że:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq m - 1$$

Jest $S_{n,m-1}$. Każdy ciąg spełniający warunki zadania należy do dokładnie jednej z trzech grup opisanych wyżej. Oznacza to, że:

$$S_{n,m} = S_{n-1,m} + S_{n-1,m-1} + S_{n,m-1}.$$

Ponadto $S_{n,1} = 2n + 1$ oraz $S_{1,m} = 2m + 1$. Warunki te wyznaczają wszystkie liczby $S_{n,m}$ jednoznacznie i nie zmieniają się po zamianie ról n oraz m . Wobec tego $S_{n,m} = S_{m,n}$ dla wszystkich n, m . $\square$

Rozwiązanie 2: Niech $T_{n,m,k}$ oznacza liczbę ciągów spełniających warunki zadania, w których k spośród liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest różnych od 0. Każdy taki ciąg możemy uzyskać w jednoznaczny sposób, wybierając kolejno:

- k -elementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ — będzie to zbiór indeksów niezerowych wyrazów;
- k -elementowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{+, -\}$ — będą to znaki kolejnych niezerowych wyrazów;
- k -elementowy ciąg dodatnich liczb całkowitych o sumie nie przekraczającej m — będą to wartości bezwzględne kolejnych niezerowych wyrazów.

Pierwszy punkt można zrealizować na $\binom{n}{k}$ sposobów, drugi zaś na 2^k sposobów. Ostatni punkt sprowadza się do wybrania k -elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ — wtedy różnice między sąsiednimi elementami w tym zbiorze wraz z najmniejszym elementem tego zbioru utworzą szukany ciąg. Takich ciągów jest więc $\binom{m}{k}$. Ostatecznie więc:

$$T_{n,m,k} = 2^k \binom{n}{k} \binom{m}{k}$$

dla $k = 0, 1, \dots, \min\{n, m\}$. W takim razie $T_{n,m,k} = T_{m,n,k}$. Ale skoro:

$$S_{n,m} = T_{n,m,0} + T_{n,m,1} + \dots + T_{n,m,\min\{n,m\}},$$

to również $S_{n,m} = S_{m,n}$. $\square$

Rozwiązanie 3: Twierdzymy, że $S_{n,m}$ jest równe liczbie łamanych rozpoczynających się w punkcie $(0, 0)$ i kończących w punkcie (n, m) o następującej własności: współrzędne następnego punktu tej

łamanej są większe od współrzędnych poprzedniego punktu o 0 lub 1. Innymi słowy: $S_{n,m}$ to liczba ścieżek z $(0, 0)$ do (n, m) składających się wyłącznie z ruchów „na prawo”, „do góry” oraz „ukośsem na prawo i do góry”. Oczywiście będzie to oznaczało, że $S_{n,m} = S_{m,n}$. Aby udowodnić naszą tezę, połączymy w pary ciągi spełniające warunki zadania z powyższymi ścieżkami.

Mając dany ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniający warunki zadania, określamy ścieżkę łączącą $(0, 0)$ z (n, m) następująco. Jeśli $a_1 \geq 0$, wykonujemy a_1 kroków do góry, a następnie jeden krok w prawo. Jeśli $a_1 < 0$, to wykonujemy $|a_1| - 1$ kroków do góry, a następnie jeden krok ukośny. W obu przypadkach ścieżka kończy się w punkcie $(1, |a_1|)$. Procedurę tę następnie powtarzamy dla $a_2, a_3, \dots, a_n$. W ten sposób dotrzemy do punktu $(n, |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)$. Pozostaje wykonać $m - (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)$ ruchów w górę, by dotrzeć do (n, m) .

Jeśli dana jest ścieżka, łatwo odkodować jedyny odpowiadający jej ciąg. W tym celu należy ścieżkę podzielić na fragmenty, składające z nieujemnej liczby ruchów do góry zakończonych jednym ruchem na prawo lub ukośnie. Łączna liczba ruchów do góry lub ukośnych w pierwszym fragmencie będzie wartością bezwzględną liczby a_1 , zaś jej znak będzie dodatni, gdy pierwszy fragment kończy się ruchem na prawo, w przeciwnym zaś razie — ujemny. Kolejne fragmenty analogicznie będą odpowiadały liczbom $a_2, a_3, \dots, a_n$. Na końcu zostanie pewna liczba ruchów do góry, która opisuje różnicę między $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ oraz m .

Powyższe argumenty dowodzą, że faktycznie ciągów spełniających warunki zadania jest tyle samo, co opisanych na początku ścieżek. $\square$

Uwaga 1: Autorem rozwiązania 3 jest Dariusz Kosz.

Uwaga 2: Liczby $S_{n,m}$ są nazywane *liczbami Delannoya*.

Uwaga 3: Powyższe zadanie pojawiło się na finale OM w 2016 roku i dlatego — mimo niezwyklego uroku — nie zostało uwzględnione.