

KOMU W DROGĘ, TEMU CZAS!

CZĘŚĆ PIERWSZA – TEORIA

Centralne symbole Newtona $N_n = \binom{2n}{n}$ – drogi $(0, 0) \rightarrow (n, n)$ z krokami $(1, 0), (0, 1)$.

Liczby Catalana $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ – drogi $(0, 0) \rightarrow (n, n)$ pod przekątną z krokami $(1, 0), (0, 1)$.

Trójkąty Pascala i Catalana.

CZĘŚĆ PIERWSZA – ZADANIA

(1.1) Zlicz sposoby łączenia liczb $1, 2, \dots, 2n$ w pary (wszystkie / bez zazębienia $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$).

(1.2) Narysuj wszystkie drogi odpowiadające liczbom $N_1, N_2, N_3, C_1, C_2, C_3, C_4$.

(1.3) Wykaż, że ciągi o wyrazach $a_n = \frac{N_{n+1}}{N_n}$ oraz $b_n = \frac{C_{n+1}}{C_n}$ są rosnące i mają granicę 4.

(1.4) Uzasadnij wzór $C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \dots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

(1.5) Zlicz podziały n -kąta foremnego na trójkąty niekrzyżującymi się wewnątrz przekątnymi.

CZĘŚĆ DRUGA – TEORIA

Centralne liczby Delannoya $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ – drogi $(0, 0) \rightarrow (n, n)$ z krokami $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

Liczby Schrödera $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ – drogi $(0, 0) \rightarrow (n, n)$ pod przekątną z krokami $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

Trójkąty Delannoya i Schrödera.

CZĘŚĆ DRUGA – ZADANIA

(2.1) Narysuj wszystkie drogi odpowiadające liczbom D_1, D_2, S_1, S_2, S_3 .

(2.2) Uzasadnij wzór $S_n = 3S_{n-1} + S_{n-2}S_1 + S_{n-3}S_2 + \dots + S_2S_{n-3} + S_1S_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

(2.3) Wskaż nierówności pomiędzy N_n, C_n, D_n, S_n z wyjątkiem nierówności pomiędzy N_n, S_n .

(2.4) Wiedząc, że $(n+1)S_n = (6n-3)S_{n-1} - (n-2)S_{n-2}$ dla $n \geq 2$, wskaż nierówność pomiędzy N_n, S_n .

(2.5) Wskaż wzory rekurencyjne dla liczb $N_{n,m}, C_{n,m}, D_{n,m}, S_{n,m}$ zliczających drogi $(0, 0) \rightarrow (n, m)$.

CZĘŚĆ TRZECIA – ZADANIA DODATKOWE

(3.1) Wykaż, że liczby N_n, S_n są parzyste, a liczba D_n jest nieparzysta dla $n \geq 1$.

(3.2) Wykaż, że jeśli n ma dokładnie k jedynek w zapisie binarnym, to $\binom{2n}{n}/2^k \in \mathbb{N}$ oraz $\binom{2n}{n}/2^{k+1} \notin \mathbb{N}$.

(3.3) Wykaż, że liczba C_n jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^m - 1$ dla $m \geq 0$.

(3.4) Niech $k \geq 1$. Wskaż wszystkie liczby $n \geq 0$ spełniające $C_n/2^k \in \mathbb{N}$ oraz $C_n/2^{k+1} \notin \mathbb{N}$.

(3.5) Uzasadnij wzór $D_n = \binom{n}{0}^2 \cdot 2^0 + \binom{n}{1}^2 \cdot 2^1 + \dots + \binom{n}{n}^2 \cdot 2^n$ dla $n \geq 0$.

(3.6) Niech $C(x) = C_0 + xC_1 + x^2C_2 + \dots$ dla $|x| < \frac{1}{4}$. Wykaż, że $C(x) = 1 + xC(x)^2$.

(3.7) Niech $S(x) = S_0 + xS_1 + x^2S_2 + \dots$ dla $|x| < \frac{1}{6}$. Wykaż, że $S(x) = 1 + xS(x) + xS(x)^2$.

(3.8) Wykaż, że $2xC(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$ dla $|x| < \frac{1}{4}$ i znajdź inny dowód wzoru $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ dla $n \geq 0$.