



ODDZIAŁ INTENSYWNEGO MYŚLENIA

GĘŚCIEJ SIĘ NIE DA

25 KWIETNIA 2026

- (a) Jak najgęściej upakować jednakowe koła na płaszczyźnie?

ROZWIĄZANIE: W węzłach siatki trójkątnej.

- (b) Kto i kiedy udowodnił, że tak jest najgęściej?

ROZWIĄZANIE: AXEL THUE w 1890¹ (dowód czasem uznawany za niekompletny), LÁSZLÓ FEJES TÓTH w 1942².
Wśród układów kratowych: CARL FRIEDRICH GAUSS w 1831³.

- (c) Jaka jest gęstość najlepszego upakowania?

ROZWIĄZANIE: $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 91\%$.

- (d) Jak najgęściej upakować jednakowe kule w przestrzeni?

ROZWIĄZANIE: Układać na sobie warstwy złożone z kul o środkach w kracie trójkątnej na płaszczyźnie.

- (e) Kto i kiedy udowodnił, że tak jest najgęściej?

ROZWIĄZANIE: THOMAS HALES w 1998⁴; formalny dowód w 2017⁵. Wśród układów kratowych: CARL FRIEDRICH GAUSS w 1831⁶. Hipotezę postawił JOHANNES KEPLER w 1611⁷.

- (f) Ile stron liczył dowód?

ROZWIĄZANIE: 121 plus obliczenia komputerowe. Nie został w całości sprawdzony przed publikacją.

- (g) Jaka jest gęstość najlepszego upakowania?

ROZWIĄZANIE: $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74\%$.

- (h) Czy każde upakowanie ma gęstość?

ROZWIĄZANIE: Nie.

- (i) Jaka jest liczba wymiarów, w których znamy najlepsze upakowanie jednakowych kul?

ROZWIĄZANIE: 5.

- (j) Jakie to są wymiary?

ROZWIĄZANIE: 1, 2, 3, 8, 24.

- (k) Kto i kiedy znalazł najlepsze upakowanie jednakowych kul w wymiarze 8?

ROZWIĄZANIE: MARYNA VIAZOVSKA w 2016⁸.

- (l) Kto i kiedy znalazł najlepsze upakowanie jednakowych kul w wymiarze 24?

ROZWIĄZANIE: MARYNA VIAZOVSKA ze współautorami, też w 2016⁹.

- (m) Jaką nagrodę i kiedy dostała MARYNA VIAZOVSKA za swoje odkrycia?

ROZWIĄZANIE: Medal Fieldsa w 2022 roku.

- (n) Jak szybko maleje najlepsza gęstość upakowania kul ze wzrostem wymiaru?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo, między $cn2^{-n}$ a $2^{-0,599n}$.

- (o) Czy najlepsza gęstość zawsze maleje ze wzrostem wymiaru?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo, ale najlepsze znane upakowanie w wymiarze 23 jest gorsze niż w wymiarze 24!

- (p) Czy najlepszą gęstość upakowania kul w każdym wymiarze daje upakowanie kratowe?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo, zapewne nie. Najlepsze znane upakowanie w wymiarze 10 jest niekratowe¹⁰.

- (q) Czy najlepszą gęstość upakowania kul w każdym wymiarze daje upakowanie okresowe?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo. Można uzyskać najlepszą minus dowolnie mały epsilon, ale nie ma nawet dobrej hipotezy w sprawie tego, czy optymalne upakowanie jest okresowe, kwazikrystaliczne czy chaotyczne.

¹A. THUE, *Selected Mathematical Papers*, Universitetsforlaget, Oslo, 1977: 257–263.

²L. F. TÓTH, *Über die dichteste Kugellagerung*, Math. Z. 48 (1942): 676–684.

³C. F. GAUSS, *Besprechung des Buchs von L. A. Seeber: Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen usw.*, Göttingische Gelehrte Anzeigen, 1831.

⁴T. C. HALES, *A proof of the Kepler conjecture*, Ann. Math. 162(3) (2005): 1065–1185.

⁵T. HALES et al., *A Formal Proof of the Kepler Conjecture*, Forum Math. Pi 5 (2017): e2.

⁶C. F. GAUSS, *ibid.*

⁷J. KEPLER, *Strena seu de nive sexangula*, 1611.

⁸M. VIAZOVSKA, *The sphere packing problem in dimension 8*, Ann. Math. 185(3) (2017): 991–1015.

⁹H. COHN, A. KUMAR, S. MILLER, D. RADCHENKO, M. VIAZOVSKA, *The sphere packing problem in dimension 24*, Ann. Math. 185(3) (2017): 1017–1033.

¹⁰N. J. A. SLOANE, *The Sphere-Packing Problem*, Doc. Math. 3 (1998): 387–396



- (r) A czy w ogóle na pewno można uzyskać największą gęstość?

ROZWIĄZANIE: Tak! Udowodnił to HELMUT GROEMER w 1986¹¹.

- (s) Jaką najmniejszą gęstość ma zakleszczony układ jednakowych kół na płaszczyźnie?

ROZWIĄZANIE: Zero¹²!

- (t) To samo pytanie w wymiarze 3: jaka jest najmniejsza gęstość upakowania wzajemnie zakleszczonych kul?

ROZWIĄZANIE: Też zero — wystarczy poukładać na sobie takie same warstwy z konstrukcji dwuwymiarowej.

- (u) Czy każdy zbiór wypukły na płaszczyźnie można upakować gęściej niż koło?

ROZWIĄZANIE: Nie!

- (v) Jaki zbiór wypukły na płaszczyźnie jest najgorszy pod względem gęstości upakowania?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo! Hipoteza (zwłaszcza w przypadku, gdy dopuszczamy tylko przesunięcia i obroty o 180°): siedmiokąt¹³, a wśród środkowo symetrycznych: zaokrąglony ośmiokąt (rogi zaokrąglone hiperbolami st stycznymi do sąsiednich boków i asymptotycznymi do kolejnych boków)¹⁴.

- (w) Co można upakować gęściej: kule czy czworościany foremne?

ROZWIĄZANIE: Czworosciany. Ale nie jest to łatwe!

- (x) Jaka jest gęstość najlepszego upakowania czworościanów foremnych?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo. Najlepsza znana: $\frac{4000}{4671} \approx 86\%$ ¹⁵.

- (y) Czy każdy zbiór wypukły w przestrzeni można upakować gęściej niż kulę?

ROZWIĄZANIE: Nie wiadomo!

- (z) Kto i kiedy postawił hipotezę, że tak jest?

ROZWIĄZANIE: STANISŁAW ULAM w 1972 w rozmowie z MARTINEM GARDNEREM¹⁶ — choć ściśle rzecz biorąc było to przypuszczenie, nie hipoteza.

- (1) (*triangulacja Delonego/Delaunay'go*) Na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A_1, A_2, \dots, A_n$, które nie leżą na jednej prostej. Niech $\mathcal{F}$ oznacza otoczkę wypukłą tych punktów (czyli najmniejszy wielokąt wypukły je zawierający). Udowodnij, że przy pomocy odcinków o końcach w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$ można podzielić $\mathcal{F}$ na trójkąty w taki sposób, by okręgi opisane na tych trójkątach nie zawierały we wnętrzach żadnego z punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- (2) Udowodnij to samo twierdzenie dla nieskończenie wielu punktów (przy założeniu, że w każdym kole jest ich jednak skończenie wiele).
- (3) Wykaż, że gęstość upakowania jednakowych kół na płaszczyźnie nie przekracza $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$.
- (4) Krata $\Gamma_8 \subseteq \mathbb{R}^8$ składa się z punktów $(x_1, x_2, \dots, x_8)$, których współrzędne są albo wszystkie całkowite, albo wszystkie połówkowe (tj. postaci $n + \frac{1}{2}$), i które dodatkowo sumują się do parzystej liczby całkowitej.
 - (a) Wyznacz zbiór odległości między parami punktów kraty Γ_8 .
 - (b) Ilu sąsiadów ma każdy punkt tej kraty?
 - (c) Znajdź 8 wektorów $v_1, v_2, \dots, v_8 \in \Gamma_8$ takich, że Γ_8 składa się z punktów postaci $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_8v_8$, gdzie $k_1, k_2, \dots, k_8$ są całkowite.
 - (d) Wyznacz gęstość upakowania zadaną przez kratę Γ_8 .
- (5) (*twierdzenie de Bruijna*) Cegłami o wymiarach $a \times ab \times abc$ (gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi) wypełniono ściśle pudełko $A \times B \times C$. Udowodnij, że liczby A, B, C można pozamieniać w taki sposób, że a dzieli A , ab dzieli B , zaś abc dzieli C .

Mateusz Kwaśnicki

¹¹H. GROEMER, *Some basic properties of packing and covering constants*, Discrete Comput. Geom. 1 (1986): 183–193.

¹²K. BÖRÖCZKY, *Über stabile Kreis- und Kugelsysteme*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 7 (1964): 79–82.

¹³Y. KALLUS, *Pessimal packing shapes*, Geom. Topol. 19 (2015): 343–363.

¹⁴K. REINHARDT, *Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruente Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven*, Abh. Math. Sem., Hamburg, Hansischer Universität, Hamburg 10, 216–230, 1934.

¹⁵E. R. CHEN, M. ENGEL, S. C. GLOTZER, *Dense crystalline dimer packings of regular tetrahedra*, Discr. Comput. Geom. 44(2) (2010): 253–280.

¹⁶M. GARDNER, *New Mathematical Diversions (Revised Edition)*, Washington: Mathematical Association of America, 1995: 251.